

Татјана Атанасова-Пачемска
Зоран Трифунов

МАТЕМАТИКА

»»»» за **IV**^{та} година
средно стручно четиригодишно образование



Татјана Атанасова-Пачемска
Зоран Трифунов

МАТЕМАТИКА за IV ГОДИНА

СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Струки:

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, Кожа и слични производи и Хемиско технолошка/Хемија и технологија, средно стручно образование

МАТЕМАТИКА за IV година

Средно стручно образование

Струки: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, Кожа и слични производи и Хемиско технолошка/Хемија и технологија, средно стручно образование

Автори:

Татјана Атанасова-Пачемска

Зоран Трифунов

Рецензенти:

Бети Андоновиќ

Вилма Илиевска

Мира Ташкова

Илустрации:

Татјана Атанасова-Пачемска

Зоран Трифунов

Лектор:

Виолета Јовановска-Никовска

Стручна редакција:

Методи Главче

Уредник:

Елизабета Анѓелова Шурбевски

Издавач: Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија,
ул. „Св. Кирил и Методиј“ бр. 54, 1000 Скопје

Графички дизајн и компјутерска обработка: Тримакс – Скопје

Графичко и техничко уредување: Ели Василевска Илиевска – APC СТУДИО

Место и година на издавање: Скопје, 2025 година

Со одлука бр. 26-576/1 од 8.04.2024 година, Националната комисија за учебници го одобри учебникот по наставниот предмет Математика за IV година СТРУКА/СЕКТОР: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, Кожа и слични производи и Хемиско технолошка/Хемија и технологија, средно стручно четиригодишно образование.

МАТЕМАТИКА ЗА IV ГОДИНА

Татјана Атанасова-Пачемска
Зоран Трифунов

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР	7
-----------------	---

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 1. НИЗИ И ПРОГРЕСИИ

1. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА НА НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ	9
2. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА	18
3. ЗБИРОТ НА ПРВИТЕ N – ЧЛЕНОВИ НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА	23
4. ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА	27
5. ЗБИРОТ НА ПРВИТЕ N – ЧЛЕНОВИ НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА	32
6. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА НИЗА	37
7. ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ	47
8. ЗБИР НА ЧЛЕНОВИ НА БЕСКОНЕЧНА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА.....	55
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА.....	61

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 2. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

1. ПОИМ ЗА ФУНКЦИЈА	64
1.1. Дефинициона област на функција	65
1.1.1. Дефинициона област на полиномна функција	66
1.1.2. Дефинициона област на функцијата со парен коренов показател	66
1.1.3. Дефинициона област на дробно рационална функција	67
1.1.4. Дефинициона област на логаритамска функција	68
1.2. Нули на функција	69
1.3. Парност на функција	71
1.4. Ограниченост на функција	73
1.5. Монотоност на функција	74
2. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА	79
3. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА	84
4. СТЕПЕНСКА ФУНКЦИЈА	90
4.1. Степенска функција со природен експонент	90
4.2. Степенска функција со експонент рационален број	92
5. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА	98
6. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА	100
7. ПОИМ ЗА ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА	102
8. ОСНОВНИ ТРИГИНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ	105
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА.....	108

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 3. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

1. ПОИМ ЗА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА.....	112
Граница на функција.....	112
Граница на функција кога аргументот се стреми кон бесконечност.....	115

<i>Лева и десна гранична вредност</i>	116
<i>Својства на граници на функции</i>	121
2. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА	130
3. АСИМПТОТИ НА КРИВА.....	144
4. ГРАНИЦИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ. АСИМПТОТИ НА ГРАФИЦИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ	152
<i>Линеарна функција</i>	152
<i>Квадратна функција</i>	153
<i>Степенска функција</i>	155
<i>Експоненцијална функција</i>	156
<i>Логаритамска функција</i>	157
5. СПЕЦИЈАЛНИ ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ	158
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА	163
МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 4. ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА	167
1. ДЕФИНИЦИЈА НА ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА.....	167
2. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ИЗВОД НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ.....	173
3. ИЗВОД ОД ЗБИР, РАЗЛИКА, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК	180
<i>Извод од збир и разлика на функции</i>	180
<i>Извод од производ на константа со функција</i>	181
<i>Извод од производ на функции</i>	181
<i>Извод од количник на функции</i>	183
4. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА	187
5. ЛОГАРИТАМСКИ ИЗВОДИ	193
6. ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ. ОДРЕДУВАЊЕ РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА ФУНКЦИЈА .	199
<i>Извод од повисок ред</i>	199
<i>Равенка на тангента</i>	200
<i>Равенка на нормала</i>	204
7. ПРИМЕНА НА ИЗВОД ВО ФИЗИКА	208
8. ПРИМЕНА НА ИЗВОД. ИСПИТУВАЊЕ ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА	211
<i>Испитување монотоност на функција</i>	211
<i>Испитување екстремни вредности на функција</i>	216
<i>Испитување на конвексност и конкавност на функција. Превојни точки на функција</i>	224
<i>Испитување на текот и скицирање график на функција</i>	227
9. ПРИМЕНА НА ИЗВОД ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМИ ОД ЕКСТРЕМИ	241
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА.....	253
ПРИЛОГ: ТЕСТОВИ	255
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИ	264

ПРЕДГОВОР

Учебникот „Математика“ е напишан според наставната програма по задолжителниот предмет Математика за IV година-средно стручно образование во следните струки: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, Кожа и слични производи и Хемиско технолошка/Хемија и технологија.

Во учебникот се обработени основните теории и концепти на современата математичка наука кои се неопходни во оформувањето на наведените стручни профили. Од теориски и практичен аспект, обработени се содржини во 4 различни модулари единици – низи и прогресии, елементарни реални функции, гранична вредност на функции со една реална променлива и извод на функција (основи на диференцијалното сметање) како најпотребни и најупотребувани во теоријата и практиката.

Посебно внимание е ставено на обработката на реалните функции каде секој математички поим е поврзан со соодветен стручен поим од теоријата и практика, што на учениците се очекува да ја приближи примената на математичките методи и инструменти во толкувањето на резултатите добиени од различни анализи и истражувања.

Учебникот содржи доволен број на решени примери кои на учениците ќе им помогнат во совладувањето на методите и техниките за решавање на математичките проблеми во технички контекст. Примерите се поткрепени со графички прикази, најчесто нацртани во отворениот софтверски пакет ГЕОГЕБРА. Учебникот содржи и задачи кои се делумно или целосно нерешени и тие се наменети за самостојна работа на учениците со цел постигнување на поголема успешност, ефикасност и ефективност во совладувањето на наставниот материјал и постигнување на резултатите од учењето.

Во овој учебник направен е почетен обид да се овозможи директен пристап до дигиталните ресурси – аплети (интерактивни дигитални скици) изработени од авторите.



Скенирајте ги QR – кодовите со Вашиот паметен телефон или внесете ги директно на компјутер активните линкови за да пристапите директно до специјално изработените аплети за визуелно претставување или цртање.

За оформувањето на овој учебник посебна заслуга имаат и рецензентите кои со своите сугестии и забелешки придонесоа во подобрувањето на квалитетот на ракописот, за што им искажуваме посебна благодарност.

Се надеваме дека учебникот ќе го користат учениците од техничките струки, но и останати ученици кои го изучуваат предметот математика во други струки, а стекнатите знаења ќе им бидат соодветна подлога и за продолжување на образованието, особено во студиски програми од природно-математичките и техничко-технолошките подрачја.

Од авторите

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 1

НИЗИ И ПРОГРЕСИИ

Во оваа модуларна единица ќе научиш за:

Поим за низа

Аритметичка прогресија.

Општ член. Збир на првите n – членови.

Основни својства на аритметичка прогресија. Интерполација.

Геометриска прогресија.

Општ член. Збир на првите n – членови.

Основни својства на геометриска прогресија. Интерполација.

Конвергентни и дивергентни низи.

Граница на конвергентна низа.

Збир на бескрајна геометриска прогресија.

НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА НА НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

ВОВЕД

Во секојдневниот живот често имаме потреба некои предмети, поими или броеви да ги подредиме во некој логички и насочен редослед според одредено правило, пропис. Со ваквото подредување, елементите се наредени во низа. Секој елемент има точно одредено место во таа низа.

Пример 1. Примери за низи.

а) Грчките букви, кои се користат од вториот век пред нашата ера се поредени во низа. На прво место е α , на второ место е β , и.т.н. и на последно место, т.е. дваесет и четврто место е ω . Може да запишеме дека на 1 му е придружена буквата α , на 2 буквата β , и на крај на 24 буквата ω . Добиена е низа $\alpha, \beta, \dots, \omega$.

б) Ако на секој природен број го придружиме степенот на бројот 2, т.е. на 1 го придружиме 2^1 , на 2 го придружиме 2^2 , ..., на n го придружиме 2^n , ... се добива низа од степените на бројот 2. Добиена е низа $2^1, 2^2, \dots, 2^n, \dots$

Дефиниција: Секоја функција $f: N \rightarrow R$, од множеството на природни броеви (N) во множеството на реални броеви (R), ја викаме низа од реални броеви.

Пример 2. Да се запише низа т.ш. на секој природен број ќе му го придружиме неговиот квадрат.

Решение:

За полесно означување на членовите на низите ќе користиме функција.

Нека $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ и $f(x) = x^2$ е функцијата со која ќе ги добиеме елементите на низата.

$$f(1) = 1^2 = 1, \quad f(2) = 2^2 = 4, \quad f(3) = 3^2 = 9, \quad \dots \quad f(n) = n^2 \dots$$

Добивме, $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ - низа од реални броеви.

Ако функцијата ја означиме со $a: N \rightarrow R$, тогаш членовите на низата може да ги запишеме со ознака a и индекс, според редниот број на членот.

Во дадениот пример може да запишеме:

$$f(1) = a_1 = 1^2 = 1, \quad f(2) = a_2 = 2^2 = 4, \quad f(3) = a_3 = 3^2 = 9, \quad \dots \quad f(n) = a_n = n^2, \dots$$

Броевите $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ се викаат **членови на низата**. Кратко низата ја означуваме со симболот (a_n) .

a_1 е прв член, a_2 е втор член, a_3 е трет член, a_n е **n -ти член на низата**.

Бројот a_n се нарекува **општ член на низата**, а индексот го претставува реден број на тој член во низата.

Низата е напoлно определена ако го знаеме правилото за добивање на општиот член a_n .

Пример 3. Да се запишат првите 5 члена на низата дадена со општ член $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Решение:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}, \quad a_5 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Низата од реални броеви е: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$

Пример 4. а) Да се запише низата дадена со општ член $a_n = 3n+1, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

б) Да се запише низата дадена со општ член $b_n = 3n+1, n \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Решение:

а)

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 15 + 1 = 16$$

б)

$$b_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$b_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$b_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

...

$$b_n = 3 \cdot n + 1$$

...

а) Низата од реални броеви 4, 7, 10, 13, 16 има 5 членови и се нарекува низа со конечен број на членови (конечна низа).

б) Низата од реални броеви 4, 7, 10, 13, 16, ..., $3n+1$, ... има бесконечно многу членови и се нарекува низа со бесконечен број на членови (бесконечна низа).

Низата (a_n) , може да ја претставиме во Геогедра користејќи ги колоните А и В во табеларниот приказ, каде во колоната А се запишува редниот број на членот, а во колона В формулата за општиот член на низата, при што ќе треба да се замени вредноста на n со

полето A1. Со копирање на формулата се добиваат останатите членови на низата.

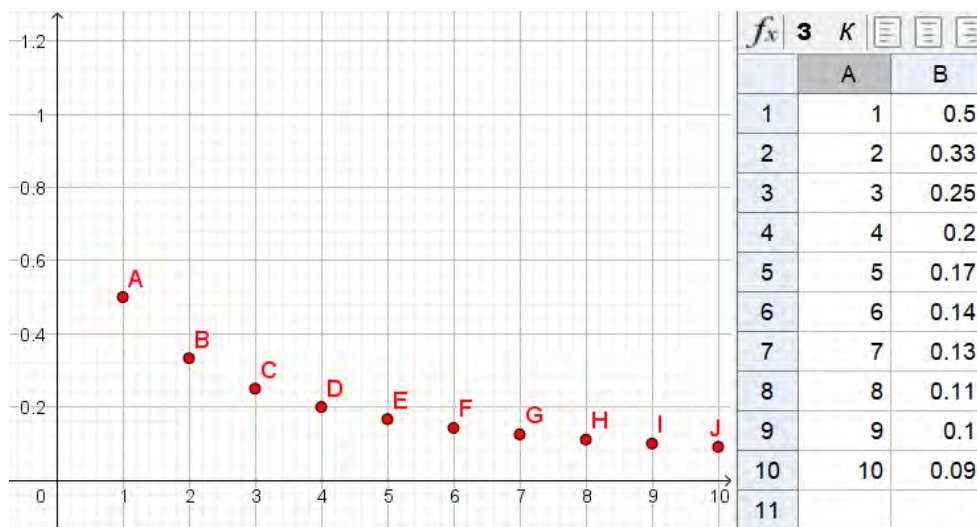
На пример нека е дадена низата со општ член $a_n = 3n + 1$. Во колона В запишани се првите 5 членови на низата.

	A	B
1	1	=3*A1 + 1
2	2	
3	3	
4	4	
5		
6		

	A	B	C
1	1	4	
2	2	7	
3	3	10	
4	4	13	
5	5	16	
6			

Низата (a_n) , како функција од множеството N во множеството R може да се претстави графички во координатна рамнина. При тоа на x -оската го нанесуваме редниот број n на членот, а на y -оска вредноста на a_n . Така на пример, на првиот член ја придружуваме точката $(1, a_1)$, на вториот $(2, a_2)$ и т.н.

На пример дадена е низата со општ член $a_n = \frac{1}{n+1}$. Прво во колоните А и В ги добиваме редните броеви на членовите и нивната вредност. Со помош на наредбата „Креирај листа од точки“ од Геогebra и селектирање на пополнетите колони А и В, во геометрискиот прозорец графички се преставува низата.



Доколку сакаме графички да ги претставиме само членовите на низата, тогаш тоа се точки од бројната оска.

На пример низата со општ член $a_n = \frac{1}{n+1}$, се претставува само со точки на x -оската, каде вредноста на секој член од низата е претставен како посебна точка.



Пример 5. Дадена е низата од броеви $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$. Со проба и проверка да се определи нејзиниот општ член.

Решение: Општиот член на низата е $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, бидејќи во броителот имаме степени на редниот бројот n на членот, а во именителот на редниот број n на членот е додадено само 1.

Да разгледаме неколку примери на низи и да утврдиме некои карактеристични својства на низите од реални броеви.

Пример 6. Дадени се низите со општи членови

а) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

б) $a_n = \frac{1}{n+1}$

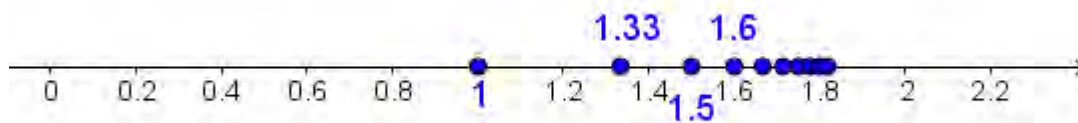
в) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

г) $a_n = 2$

Да се запишат првите пет членови на низата, да се претстават на бројна оска и да се определи знакот на разликата на соседните членови $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_n - a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Решение:

а) Членовите на низата се: $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \dots$ или
запишани со приближни вредности члените на низата се: 1, 1.33, 1.5, 1.6, 1.67, ...



$$a_1 - a_2 = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3-4}{3} = -\frac{1}{3} < 0. \text{ Добиваме } a_1 - a_2 < 0,$$

$$a_2 - a_3 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{8-9}{6} = -\frac{1}{6} < 0. \text{ Добиваме } a_2 - a_3 < 0$$

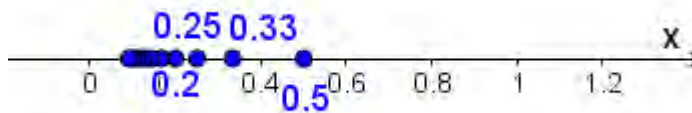
$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+2} = \frac{2n^2 + 4n - 2n^2 - 2n - 2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Добивме $a_n - a_{n+1} < 0$, т.е. $a_n < a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

За низата со општ член $a_n = \frac{2n}{n+1}$ велиме дека **расте**.

б) Членовите на низата се: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ или

запишани со приближни вредности членивите на низата се: 0.5, 0.33, 0.25, 0.2, 0.17, ...



$$a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} > 0. \text{ Добиваме } a_1 - a_2 > 0,$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} > 0. \text{ Добиваме } a_2 - a_3 > 0$$

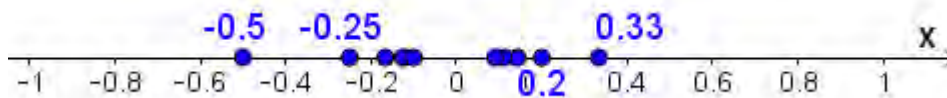
$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Се добива дека $a_n - a_{n+1} > 0$, т.е. $a_n > a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

За низата со општ член $a_n = \frac{1}{n+1}$ велиме дека **опаѓа**.

в) Членовите на низата се: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$ или запишани со приближни

вредности членивите на низата се: -0.5, 0.33, -0.25, 0.2, -0.17, ...



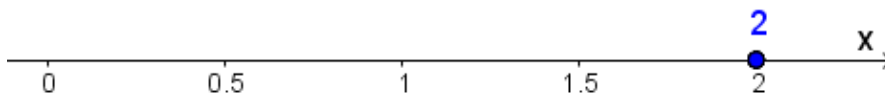
$$a_1 - a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6} < 0. \text{ Добиваме } a_1 - a_2 < 0,$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} > 0. \text{ Добиваме } a_2 - a_3 > 0$$

Се добива дека знакот на разликата се менува во зависност од вредноста на $n \in \mathbb{N}$.

За низата со општ член $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ велиме дека **ниту расте, ниту опаѓа**.

г) Членовите на низата се: $2, 2, 2, 2, 2, \dots$



$$a_1 - a_2 = 2 - 2 = 0. \text{ Добиваме } a_1 - a_2 = 0,$$

$$a_2 - a_3 = 2 - 2 = 0. \text{ Добиваме } a_2 - a_3 = 0$$

$$a_n - a_{n+1} = 2 - 2 = 0. \text{ Добивме } a_n - a_{n+1} = 0, \text{ т.е. } a_n = a_{n+1} \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

За низата со општ член $a_n = 2$ велиме дека е **константна низа**.

Својството на растење/опаѓање на низа се вика **својство на монотоност**, а низата **монотона низа**.

Дефиниција:

Низата (a_n) монотонно **расте** ако за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} < 0)$ т.е.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

Низата (a_n) монотонно **опаѓа** ако за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} > 0)$ т.е.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

Низата (a_n) **не опаѓа** ако за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} \leq 0)$

Низата (a_n) **не расте** ако за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} \geq 0)$.

Пример 7. Да се испита монотоноста на низата $a_n = \frac{n+1}{n+2}$.

Решение:

За да се испита монотоноста на низата, најпрво треба да се запишат неколку членови

на низата. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$, а потоа да се определи знакот на неколку разлики $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3, \dots$

од соседни членови

$$a_1 - a_2 = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} < 0, \quad a_2 - a_3 = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{20} < 0, \dots$$

Разликата помеѓу првите неколку членови од низата не го менува знакот, но за да ја испитае монотоноста треба да определиме дали ќе важи општо и за разликата на n -от и $(n+1)$ -от член.

Да ја определиме вредност на разликата $a_n - a_{n+1}$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3) - (n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 3) - (n^2 + 4n + 4)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n - 4}{(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)} < 0, \end{aligned}$$

Се добива дека $a_n - a_{n+1} < 0$. Според дефиницијата за монотоност на низа следува дека низата монотонно расте.

Во примерот 6 под в) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, ако ги разгледаме членовите на низата кои се претставени на бројната оска, може да воочиме дека сите се наоѓаат во интервалот $(-1, 1)$. Тоа може да се запише дека $-1 < a_n < 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција: Низата (a_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$, велиме дека е:

Ограничена од горе, ако постои реален број M така што $a_n \leq M$, за секој природен број n ;

Ограничена од долу, ако постои реален број m така што $a_n \geq m$, за секој природен број n ;

Ограничена, ако е ограничена од горе и од долу, т.е. постојат реални броеви m и M така што $m \leq a_n \leq M$, за секој природен број n .

Дефиницијата за ограниченост на низата може да ја искажеме и со апсолутна вредност од членовите на низата.

Дефиниција: Низата (a_n) е **ограничена** ако множеството $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено т.е. ако постои реален број $A > 0$ така што $|a_n| \leq A$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Пример 8. Да докажеме дека низата со општ член $a_n = 3 - n^2$ е ограничена од горе со бројот $M = 2$.

Решение:

Треба да докажеме дека $a_n \leq 2$ т.е. $3 - n^2 \leq 2$.

Ќе почнеме од познато неравенство. Нека $n \in \mathbb{N}$ е придоден број, тогаш:

$$\begin{array}{ll} n \geq 1 & -n^2 \leq -1 \quad / +3 \\ n^2 \geq 1^2 & 3 - n^2 \leq 3 - 1 \\ n^2 \geq 1 \quad / \cdot (-1) & 3 - n^2 \leq 2 \end{array}$$

Добивме дека $a_n \leq 2$. Докажавме дека низата е ограничена од горе со бројот 2.

Пример 9. Да се испита ограниченоста на следниве низи:

а) $a_n = \frac{1}{2n}$ б) $a_n = \frac{3n+1}{6n+5}$ в) $a_n = \frac{4n+3}{4n+5}$ г)* 0,5; 0,51; 0,511; 0,5111;...

Решение:

а) За да ја испитае ограниченоста на низите, според дефиницијата за ограниченост на низи, имаме:

За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} \leq 1$, или поинаку, ограниченоста на низата можеме да ја согледаме и ако напишеме неколку члена од низата зададена со нејзиниот општ член.

Првите неколку членови на низата се: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$, и тие претставуваат дропки, чија што вредност се намалува, а најголемата од вредностите може да се ограничи со 1.

б) За секој $n \in \mathbb{N}$, се добива

$$|a_n| = \left| \frac{3n+1}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5-3n-4}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5-(3n+4)}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5}{6n+5} - \frac{3n+4}{6n+5} \right| = \left| 1 - \frac{3n+4}{6n+5} \right| \leq 1$$

Според дефиниција, следува дека низата е ограничена.

в) За секој $n \in \mathbb{N}$, се добива

$$|a_n| = \left| \frac{4n+3}{4n+5} \right| = \left| \frac{4n+5-2}{4n+5} \right| = \left| \frac{4n+5}{4n+5} - \frac{2}{4n+5} \right| = \left| 1 - \frac{2}{4n+5} \right| \leq 1.$$

Следува дека низата е ограничена.

г) За секој $n \in \mathbb{N}$, се добива

$$|a_n| = \left| \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n} \right| = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^{n-1}}}{\frac{9}{10}} =$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)}{9} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)}{9} \leq \frac{5}{10} + \frac{1}{90} = \frac{46}{90} = \frac{23}{45}$$

од каде следува дека низата е ограничена.

Задачи за вежбање:

1. Најди ги првите пет членови на низата со општ член:

а) $a_n = \frac{2n}{1+n^2}$ б) $a_n = (-1)^n$ в) $a_n = 2^n$ г) $a_n = \frac{1}{n!}$

2. Напиши две низи кои монотонно растат.

3. Напиши две низи кои монотонно опаѓаат.

4. Најди го општиот член на следните низи:

а) 1, 4, 9, 16, 25, ... б) 1, 3, 7, 15, 31, ... в) 1, -1, 1, -1, 1, ... г) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Да се определи монотоноста и ограниченоста на низите зададени со општ член

5. $a_n = \frac{1}{3^n}$

6. $a_n = \frac{n}{n+3}$

7. $a_n = \frac{n^2}{n^2-5}$

8. $a_n = \frac{n}{e^n}$

9. Да се испита монотоност на низите со општ член:

а) $a_n = \frac{3n-1}{n^2}$ б) $a_n = \frac{2-n}{3^n}$ в) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ г) $a_n = \sqrt{n} - 2n$ д) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

10. Која од следните низи е ограничена:

а) $a_n = \frac{5n}{3n+2}$ б) $a_n = 2n + (-1)^n$ в) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2}$ г) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ д) $a_n = \frac{3^n + 2}{3^n}$

2. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

На еден кошаркарски натпревар во првата четвртина домаќинот постигнал 21 поен и тоа на следниот начин, прво постигнал 1 поен од слободно фрлање, а потоа останатите кошеви од „рекет“. На семафорот кај поените на домаќинот биле запишувани следните броеви по ред 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.

Што претставува овој запис?

Овој запис претставува низа од броеви.

Дали може да се определи разликата на двата соседни членови (секој член и неговиот претходник), почнувајќи од вториот?

Да, може да се определи разликата на два соседни члена и таа изнесува 2.

Пример 1. Дадени се низите:

а) 3, 4, 5, 6, 7, ... б) 2, 1, 0, -1, -2, ... в) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \dots$ г) 11, 6, 1, -4, -9, ... д) 2, 2, 2, 2, 2, ...

Да се определи разликата на секој член и неговиот претходник почнувајќи од вториот.

Решение:

Може да се согледа дека разликата меѓу секој член и неговиот претходник, почнувајќи од вториот е константа и изнесува:

а) 1, б) -1, в) 2, г) -5, д) 0.

Дефиниција: Низата $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ за која разликата меѓу секој нејзин член и неговиот претходник, почнувајќи од вториот е константен број d се вика аритметичка низа или аритметичка прогресија,

$$a_{n+1} - a_n = d, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}$$

Пример 2. За низата 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... определи го општиот член и разликата на секој член и неговиот претходник. Како се вика оваа низа?

Да се определи разликата на секој член и неговиот претходник. Како се вика низата?

Решение: Општиот член на низата е $a_n = 2n - 1$.

Потоа ја одредуваме разликата меѓу два соседни члена, $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$,
 $a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$, $a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$, ...

$$a_n - a_{n-1} = (2n - 1) - (2n - 3) = 2n - 1 - 2n + 3 = 2$$

Разликата е константна и таа изнесува $d = 2$.

За оваа низа велиме дека е аритметичка прогресија.

Од примерот 1, согласно дефиницијата може да забелешиме дека аритметичката прогресија е **монотono растечка** ако $d > 0$, **монотono опаѓа** ако $d < 0$ и е **константна низа** ако $d = 0$.

Општо, нека е дадена аритметичка прогресија $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$. Од дефиницијата за аритметичка прогресија следува дека:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

Од следните равенства се добива

$$a_2 - a_1 = d, \text{ т.е. } a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d, \text{ т.е. } a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d, \text{ т.е. } a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

...

$$a_n - a_{n-1} = d, \text{ т.е. } a_n = a_{n-1} + d.$$

Со замена на претходно добиените формули во

$$a_n = a_{n-1} + d \text{ се добива дека } a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Теорема: За општиот член на аритметичка прогресија важи, $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Пример 3. Одреди го 30-от член на аритметичката прогресија 3, 5, 7, 9, 11, ...

Решение: Првиот член на низата е $a_1 = 3$ и разликата е $d = 5 - 3 = 2$. Секој нареден член се зголемува за 2.

Според теоремата, може да го пресметаме триесеттиот член $a_{30} = a_1 + (30-1)d$, т.е. $a_{30} = 3 + 29 \cdot 2 = 61$

Пример 4. Кој член во аритметичката прогресија 5, 1, -3, ... е еднаков на -55?

Решение: Од дадените членови на аритметичката прогресија може да ги определиме првиот член, разликата и n -тиот член $a_1 = 5$ и $d = 1 - 5 = -4$, и $a_n = -55$. Дадените вредности ги заменуваме во формулата $a_n = a_1 + (n-1)d$ и се добива

$$-55 = 5 + (n-1) \cdot (-4) \Rightarrow -55 = 5 - 4n + 4, \text{ од каде } n = 16.$$

Бараниот член е шеснаесеттиот.

Пример 5. Пресметај го n во аритметичката прогресија ако $a_1 = -\frac{7}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$ и $a_n = -10$.

Решение: Дадените вредности ги заменуваме во формулата $a_n = a_1 + (n-1)d$. Добиваме,

$$-10 = -\frac{7}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -10 = -\frac{7}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \text{ од каде } n = 14.$$

Пример 6. Петтиот член на аритметичката прогресија е 19, а десеттиот член е 39. Да се определи низата.

Решение: Од условот на задачата имаме $a_5 = 19$ и $a_{10} = 39$. Од дефиницијата знаеме дека аритметичката прогресија е напoлно определена ако ги знаеме првиот член a_1 и разликата d .

Следува:

$$a_5 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow 19 = a_1 + 4d$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d \Rightarrow 39 = a_1 + 9d$$

На овој начин се добива системот линеарни равенки $\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases}$. Со негово решавање

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4d \\ 19 - 4d + 9d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4d \\ 5d = 20 : 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4 \cdot 4 \\ d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Се добива дека $a_1 = 3$ и $d = 4$. Бараната низата е: 3, 7, 11, 15, 19,

Пример 7. Во една продавница во првиот ден од месецот е остварен приход од 147420 денари, додека на 31-ви во истиот месец приходот бил 95610 денари. Колкав е просечниот дневен пад на приходот, ако тој може да се претстави како аритметичка прогресија која опаѓа.

Решение: Од условите на задачата имаме $a_1 = 147420$ и $a_{31} = 95610$.

Од дефиниција за аритметичка прогресија добиваме,

$$a_{31} = a_1 + (31-1)d \Rightarrow a_{31} = a_1 + 30d$$

Ги заменуваме почетните вредност,

$$95610 = 147420 + 30d, \quad 30d = 95610 - 147420, \quad 30d = -51810 : 30$$

$$d = \frac{-51810}{30}, \quad d = -1727$$

Приходите се намалуваат секој ден за 1727 денари.

Пример 8. Одреди ја аритметичката прогресија, ако збирот на третиот, петтиот и седмиот член е 39, и збирот на четвртиот и деветиот член е 35.

Решение: Од условот на задачата може да ги запишеме равенките:

$$a_3 + a_5 + a_7 = 39, \text{ и } a_4 + a_9 = 35.$$

Со замена на формулата за n -от член добиваме

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 39 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 39 \text{ т.е. } a_1 + 4d = 13$$

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 8d) = 35 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 35$$

Го добивме системот линеарни равенки:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 13 \\ 2a_1 + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 2a_1 + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 2(13 - 4d) + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 3d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4 \cdot 3 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Бараната низа е 1, 4, 7, ...

Пример 9. Меѓу броевите 9 и 37 интерполирај (вметни) 6 броеви кои со дадените образуваат аритметичка прогресија.

Решение: Од дадените услови меѓу броевите 9 и 37 треба да се вметнат 6 броеви, и притоа да се добие аритметичка прогресија 9, __, __, __, __, __, 37. Низата има 8 члена, а првиот и осмиот член се $a_1 = 9$ и $a_8 = 37$.

Од формулата за општ член (во случајот осми член) $a_8 = a_1 + 7d$, со замена добиваме

$$37 = 9 + 7d \Rightarrow d = 4.$$

Бараната прогресија е: 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37.

Пример 10. Во една продавница првиот ден од неделата е остварен промет од 10000, а петтиот ден е остварен промет од 22000 ден. Да се пресмета дневното растење на прометот, ако тој се зголемува рамномерно секој ден.

Решение: : Во задачата е дадено дека прометот рамномерно се зголемува, што значи дека прометот формира аритметичка прогресија. Во условот на задачата даден е прометот за првиот и петтиот ден, т.е. $a_1 = 10000$ и $a_5 = 22000$. Од формулата за општ член $a_5 = a_1 + 4d$, со замена се добива $22000 = 10000 + 4d \Rightarrow 4d = 12000$ т.е. $d = 3000$.

Задачи за вежбање:

1. Да се определи 15-от член на аритметичката прогресија 2, 5, 8, ...
2. Во аритметичката прогресија 5, 1, -3, ... да се определи кој член по ред е -51.
3. Да се пресмета 120-от непарен број по ред.
4. Да се пресмета 100-от парен број по ред.
5. Долгот на една организација на 1 јануари 2000 год. бил 50000 евра, а секоја наредна година долгот се намалувал за 3500 евра. После колку години долгот бил 22000 евра?

6. Збирот на три броеви кои образуваат аритметичка прогресија е 24. Одреди ги тие броеви, ако се знае дека квадратот на првиот број е за 96 помал од разликата на квадратите на третиот и вториот број.

7. Во една работилница на училиштето за средно стручно образование секој месец производството на лустери се зголемувало со иста динамика. Во првиот месец се произведени 200 лустери, а во четвртиот месец 224. Во кој месец се произведени 272 лустери?

8. Меѓу броевите 12 и 100 вметни 10 броеви, кои заедно со дадените образуваат аритметичка прогресија.

9. Да се определи аритметичката прогресија за која збирот од четвртиот и шестиот член е -20, а производот на првиот и петиот член е -140.

10. Најди аритметичка прогресија:

а) ако $a_1 + a_4 = -22$ и $a_5 = -6$,

б) ако $a_2 + a_{12} = 50$ и $a_3 + a_7 = 38$.

11. Одреди го n -от член во аритметичката прогресија ако:

а) $a_1 = 4, d = 3, n = 8$ б) $a_1 = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{4}, n = 9$

в) $a_1 = -9, d = 5, n = 12$ г) $a_1 = a + b, d = a, n = 15$

3. ЗБИРОТ НА ПРВИТЕ n – ЧЛЕНОВИ НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Нека е дадена аритметичка прогресија со конечен број на членови 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Членовите 2 и 9, 3 и 8, 4 и 7, 5 и 6 се еднакво одалечени од крајните членови 1 и 10. За збирот на членовите важи дека $1+10 = 2+9 = 3+8 = 4+7 = 5+6 = 11$.

Својство 1. За конечна аритметичка прогресија збирот на секои два члена еднакво одалечени од првиот и последниот член е еднаков на збирот од крајните членови, т.е.

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n, \quad 2 \leq k \leq n$$

Доказ: $a_k = a_1 + (k-1)d$ и $a_{n-(k-1)} = a_1 + (n-(k-1)-1)d = a_1 + (n-k)d$

За нивниот збир добиваме

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (k-1+n-k)d = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} = a_1 + a_n$$

што требаше и да се добие.

Да ја разгледаме повторно истата аритметичка прогресија но сега нека биде со бесконечно многу членови, т.е. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., n , ...

Што е исполнето за членовите на оваа прогресија?

$$2 = \frac{1+3}{2}, \quad 3 = \frac{2+4}{2}, \quad 4 = \frac{3+5}{2}, \quad 5 = \frac{4+6}{2}, \quad \dots$$

Воочуваме дека секој член на прогресијата, освен првиот е аритметичка средина на неговите соседни членови.

Својство 2. Секој член од една аритметичка прогресија, освен првиот, претставува аритметичка средина од членот пред него и следниот член по него, т.е.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad \text{за } k > 1, k \in N.$$

Доказ: Нека a_{k-1}, a_k, a_{k+1} се три последователни членови на една аритметичка прогресија. Според дефиниција за аритметичка прогресија важи $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$, т.е.

$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, од каде што следува $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, за $k > 1, k \in N$, што требаше и да се докаже.

Ова својство се обопштува и важи следното:

Својство 3. Секој член на аритметичката прогресија е аритметичка средина на секој пар членови од низата што се еднакво одалечени од него.

Да го разгледаме ова својство на аритметичката прогресија 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...

За бројот 10 важи: $10 = \frac{8+12}{2}, 10 = \frac{6+14}{2}, 10 = \frac{4+16}{2}, 10 = \frac{2+18}{2}, \dots$

Нека е дадена аритметичка прогресија со $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ со разлика d . Збирот на првите n членови на аритметичката прогресија се означува со S_n е:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ т.е. } S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Пример 1. Да се определи збирот на првите 10 членови на аритметичката прогресија 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

Решение:

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot (1 + 10) = 55$$

Во примерот се бараше да одреди збирот на првите 10 члена, но што ако треба да се определи збир на првите, 100 или 1000 членови?

Да ја запишеме теоремата за збирот на првите n членови на аритметичка прогресија.

Теорема: Збирот на првите n -членови на аритметичката прогресија се определува според формулите:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ или } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Доказ: Нека $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ и запишан во обратен редослед,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Со збирот на левите и десните страни на двете равенства и групирање на членовите од десните страни, добиваме:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Од својството 1, имаме

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1 \text{ и со замена се добива}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_n, \text{ т.е. } 2S_n = n(a_1 + a_n). \text{ При делење со 2}$$

ја добиваме формулата $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, што требаше и да се докаже.

Ако ја замениме формулата за n – от член на аритметичка прогресија добиваме:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \text{ т.е. } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d). \text{ Со ова е докажано и второто}$$

равенство.

Пример 2. Одреди го збирот на првите 50 членови на аритметичката прогресија 2, 6, 10, 14, 18, ...

Решение: Од дадената аритметичка прогресија може да се определи дека $a_1 = 2$ и $d = 6 - 2 = 4$. Тогаш збирот на првите 50 членови е $S_{50} = \frac{50}{2} \cdot (2 \cdot 2 + (50 - 1) \cdot 4) = 5000$.

Пример 3. Да се определи збирот на првите n природни броеви.

Решение: Низата од првите n природни броеви е 1, 2, 3, ..., n , каде $a_1 = 1$ и $a_n = n$. Со замена во формулата $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n)$, т.е. за збирот важи,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример 4. Збирот на првите 20 членови на една аритметичка прогресија е 230, а четвртиот член е 5. Одреди ја прогресијата.

Решение: Од дадените услови може да определиме $S_{20} = 230$ и $a_4 = 5$. Со замена во формулите за аритметичка прогресија ги добиваме равенките $\frac{20}{2}(2a_1 + (20 - 1)d) = 230$ и $a_1 + 3d = 5$.

$$\text{По средувањето на равенките го добиваме системот линеарни равенки} \begin{cases} 2a_1 + 19d = 23 \\ a_1 + 3d = 5 \end{cases}.$$

Решение на системот е $a_1 = 2$ и $d = 1$.

Бараната аритметичка прогресија е 2, 3, 4, ..., 21.

Пример 5. Во една аритметичка прогресија со непарен број на членови средниот член е 15, а збирот на сите членови е 135. Одреди го бројот на членовите.

Решение: Од условот на задачата $S_n = 135$ и средниот член на аритметичка прогресија со непарен број на членови е еднаков на $\frac{a_1 + a_n}{2} = 15$.

Со замена во формулата за сумата на првите n членови на аритметичката прогресија

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \frac{a_1 + a_n}{2} \text{ ја добиваме равенката } 135 = n \cdot 15, \text{ т.е. } n = 9.$$

Задачи за вежбање:

1. Колку изнесува 25-член и сумата на првите 25 членови од низата 5, 9, 13, ...
2. Одреди ја аритметичката прогресија, ако $5a_1 + 10a_5 = 0$ и $S_4 = 14$.
3. Колку членови има конечната аритметичката прогресија за која $a_1 = 7$, $d = 5$ и $S_n = 243$
4. Реши ја равенката $3 + 7 + 11 + \dots + x = 210$.
5. Да се пресмета збирот на првите 100 членови на аритметичката прогресија, ако првиот член е 7, додека 100-тиот член е 53.
6. Сумата од 40 000 денари е поделена на 10 лица така што секој нареден добива 500 денари повеќе од претходниот.
Колку денари добило првото, а колку последното лице?
7. Фирмата „АА“ за производство на кабли во 2015 произвела 70000 m кабел. Ако секоја година фирмата го зголемува производството на кабел за 500 m, тогаш да се определи колку метри кабел ќе се произведе во 2025 година и колку е произведено во целиот период.
8. Да се најде општиот член на аритметичка прогресија, ако првиот член е 10 и сумата на првите четиринаесет членови е 1050.
9. Четвртиот член на една аритметичка прогресија е 9, а деветтиот член е -6. Колку членови од прогресијата треба да се соберат за збирот да биде 54.
10. Колку членови од аритметичката прогресија 30,27,24,... треба да се соберат за нивниот збир да биде еднаков на 0.
11. Збирот на првите девет членови на една аритметичка прогресија е 144, а збирот на следните седум е 368. Најди ја прогресијата!

4. ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Пример 1. Дадени се низите:

а) $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ в) $5, -10, 20, -40, 80, \dots$

г) $99, 33, 11, \frac{11}{3}, \frac{11}{9}, \dots$ д) $5, 5, 5, \dots$

Да се определи количникот на секој член и неговиот претходен почнувајќи од вториот.

Решение:

Може да се согледа дека количникот меѓу секој член и неговиот претходен, почнувајќи од вториот е константен и изнесува:

а) 2, б) $\frac{1}{2}$, в) -2, г) $\frac{1}{3}$, д) 1.

Дефиниција: Низата $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ за која важи количникот помеѓу два соседни членови почнувајќи од вториот е константен број q се вика геометричка низа или геометричка прогресија

$$a_{n+1} : a_n = q, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}$$

Пример 2: Дадена е низата $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ Да се определи општиот член на низата и количникот на секој член и неговиот претходен член, почнувајќи од вториот. Како се вика низата?

Решение: Општиот член на низата е $a_n = 2^{n-1}$.

Го пресметуваме количникот: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$, $\frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2$, ..., $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-2}} = 2$

Количникот е константен и тој изнесува $q = 2$.

За оваа низа велиме дека е **геометричка прогресија**.

Од примерот 1, согласно дефиницијата може да забележиме дека геометричката прогресија за $a_1 > 0$ е монотонно растечка ако $q > 1$, монотонно опаѓа ако $0 < q < 1$, е константна низа ако $q = 1$, и ниту расте, ниту опаѓа $q < 0$.

За геометричката прогресија каде $a_1 < 0$ е монотонно растечка ако $0 < q < 1$, монотонно опаѓа ако $q > 1$, е константна низа ако $q = 1$, и ниту расте, ниту опаѓа $q < 0$.

Општо, нека е дадена геометричка прогресија $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$. Од дефиниција за геометричка прогресија следува дека:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Од равенствата:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \text{ т.е. } a_2 = a_1 q,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q, \text{ т.е. } a_3 = a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q, \text{ т.е. } a_4 = a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \dots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \text{ т.е. } a_n = a_{n-1} q, \text{ во равенството за } n\text{-тиот член се добива дека } a_n = a_1 q^{n-1}$$

Теорема: За општиот член на геометриската прогресија важи $a_n = a_1 q^{n-1}$

Пример 3. Првиот член на геометриска прогресија е 3, а седмиот е 192. Да се определат првите 7 членови на геометриската прогресија.

Решение: Од условот на задачата $a_1 = 3$ и $a_7 = 192$.

Од теорема за геометриска прогресија, следува:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6, \quad 192 = 3 \cdot q^6, \quad q^6 = 64, \quad q = \pm 2$$

Ако $q = 2$, тогаш геометриската прогресија е 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...,

и ако $q = -2$, тогаш геометриската прогресија е 3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, ...

Пример 4. Првиот член на геометриската прогресија е 3, количникот е 4, а 3072 е еден од нејзините членови. Кој е неговиот реден број во низата?

Решение: Од условот на задачата $a_1 = 3$, $q = 4$ и $a_n = 3072$.

Од дефиниција $a_n = a_1 q^{n-1}$ со замена се добива $3072 = 3 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 1024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1}$.

Од што следува дека $n-1=5$, т.е. $n=6$.

Следува, дадениот член е шести по ред.

Пример 5. Пресметај ги првиот член и количникот на геометриската прогресија, ако

$$a_3 = -\frac{1}{4} \text{ и } a_6 = \frac{1}{32}.$$

Решение: Од $a_3 = a_1 q^2$ и $a_3 = -\frac{1}{4}$, следува $a_1 q^2 = -\frac{1}{4}$.

Од $a_6 = a_1 q^5$ и $a_6 = \frac{1}{32}$, следува $a_1 q^5 = \frac{1}{32}$.

Добиваме систем од две равенки со две променливи
$$\begin{cases} a_1 q^2 = -\frac{1}{4} \\ a_1 q^5 = \frac{1}{32} \end{cases}$$

Ако овие две равенства ги поделиме, се добива $\frac{a_1 q^2}{a_1 q^5} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{32}} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = -8$ од што следува

дека $q^3 = -\frac{1}{8}$ т.е. $q = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$.

Во првата равенка ја заменуваме вредноста на количникот $a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$.

Добивме дека низата има прв член $a_1 = -1$ и количник $q = -\frac{1}{2}$.

Пример 6. Напиши ги првите шест членови на геометриска прогресија ако $a_5 + a_7 = 240$ и $a_4 + a_6 = 120$.

Решение: Од условот на задачата го добиваме системот линеарни равенки
$$\begin{cases} a_5 + a_7 = 240 \\ a_4 + a_6 = 120 \end{cases}$$

и со замена во формулата за n -ти член на геометриска прогресија $a_n = a_1 q^{n-1}$, го добиваме

системот равенки со две променливи
$$\begin{cases} a_1 q^4 + a_1 q^6 = 240 \\ a_1 q^3 + a_1 q^5 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^4 (1 + q^2) = 240 \\ a_1 q^3 (1 + q^2) = 120 \end{cases}$$

Со делење на равенките $\frac{a_1 q^4 (1 + q^2)}{a_1 q^3 (1 + q^2)} = \frac{240}{120}$, добиваме $q = 2$.

Со замена на вредноста на количникот во првата равенка, се добива вредноста на првиот член, т.е.

$$a_1 \cdot 2^4 (1 + 2^2) = 240 \Rightarrow a_1 = \frac{240}{80} = 3$$

Бараната прогресија е: 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

Пример 7. Да се пресмета бројот на жители во еден град после 10 години, ако секоја година бројот на жители се намалува за 1%, а сега има 60 000 жители.

Решение: Од условот на задачата следува дека намалувањето се одвива по принцип на геометрирска прогресија. Првиот член на геометрирската прогресија е $a_1 = 60000$. Бидејќи

намалувањето е $p = 1\%$, за количникот на геометрирската прогресија добиваме $q = 1 - \frac{p}{100}$,

следува $q = 1 - \frac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$ и бидејќи се бара после 10 години $n = 11$. (Сега во

градот има a_1 жители, после 1 година бројот на жители е a_2 , ..., после 10 години бројот на жители е a_{11} .)

Од $a_{11} = a_1 q^{10}$, следува $a_{11} = 60000 \cdot 0,99^{10} \Rightarrow a_{11} = 54263$

Се добива дека градот по 10 години ќе има 54 263 жители.

Пример 8. Меѓу броевите 10 и 160 вметни (интерполирај) три броеви, кои заедно со дадените образуваат геометрирска прогресија.

Решение: Од дадените услови меѓу броевите 10 и 160 треба да се вметнат 3 броеви, и ќе се формира геометрирска низа 10, __, __, __, 160. Следува $a_1 = 10$ и $a_5 = 160$.

$a_5 = a_1 q^4$, со замена добиваме $160 = 10 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$.

Постојат две геометрирски низи, и тоа:

Ако $q = 2$, тогаш низата е 10, 20, 40, 80, 160,

Ако $q = -2$, тогаш низата е 10, -20, 40, -80, 160.

Пример 9. Вкупниот извоз на метали од претпријатието „АА“ во месеците јануари и март донел профит од 1 300 000 \$, додека во февруари и април донел профит од 2 600 000 \$. Ако профитот се зголемува како геометрирска прогресија да се определи профитабилноста во првите четири месеци.

Решение: Нека a_n е профитот во n -от месец, $n = 1, 2, 3, 4$.

Од условот на задачата, следува:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1300000 \\ a_2 + a_4 = 2600000 \end{cases}$$

Од теоремата следува: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$ и $a_4 = a_1 \cdot q^3$

Со замена во системот добиваме:

$$\begin{cases} a_1(1+q^2) = 1300000 \\ a_1q(1+q^2) = 2600000 \end{cases}$$

Со замена на првата равенка во втората се добива: $1300000q = 2600000$.

Добивме дека $q = 2$, а првиот член на прогресијата е $a_1 = 260000$.

Следува

$a_1 = 260000$ \$ - јануари,

$a_2 = 260000 \cdot 2 = 520000$ \$ - февруари,

$a_3 = 260000 \cdot 2^2 = 1040000$ \$ - март,

$a_4 = 260000 \cdot 2^3 = 2080000$ \$ - април.

Задачи за вежбање:

1. Да се најде 10 - тиот член на геометриската прогресија 8, 4, 2, ...
2. Да се пресмета 20 - тиот член на геометриската прогресија: 1, 3, 9, 27,
3. Најди го првиот член на геометриската прогресија со количник 4 и осми член 256.
4. Четвртиот член на една геометричка прогресија е 162, додека шестиот член е 1458. Да се пресмета првиот член и количникот.
5. Најди ја геометриската прогресија ако $a_7 + a_5 = 160$ и $a_6 + a_4 = -80$.
6. Да се пресмета бројот b така што 3, b , 75 да формира геометричка прогресија.
7. Разликата меѓу шестиот и четвртиот член е 72, а разликата меѓу третиот и првиот член е 9. Најди ја геометриската прогресија.
8. Збирот на првите три члена на една геометричка прогресија е 6, а збирот на вториот, третиот и четвртиот член е -3. Најди ја геометриската прогресија.
9. Збирот на првите два членови на една геометричка прогресија е 15, а збирот на следните два е 60. Пресметај го првиот член и количникот на геометриската прогресија.
10. Разликата на третиот и првиот член на една геометричка прогресија е 24, а разликата на петтиот и првиот член е 624. Пресметај го првиот член и количникот на геометриската прогресија.
11. Напиши ги првите пет членови на геометриската прогресија ако $a_3 - a_2 + a_1 = 13$ и $a_5 + a_2 = 78$.

5. ЗБИРОТ НА ПРВИТЕ n – ЧЛЕНОВИ НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Нека е дадена геометриска прогресија со конечен број на членови 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Членовите 2 и 64, 4 и 32, 8 и 16, се еднакво одалечени од крајните членови 1 и 128. За производот на членовите важи дека $1 \cdot 128 = 2 \cdot 64 = 4 \cdot 32 = 8 \cdot 16 = 128$.

Својство 1. За конечна геометриска прогресија производот на секои два члена еднакво одалечени од првиот и последниот член е еднаков на производот од крајните членови, т.е.

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n, \quad 2 \leq k \leq n$$

Доказ: $a_k = a_1 q^{k-1}$ и $a_{n-(k-1)} = a_1 q^{(n-(k-1))-1} = a_1 q^{(n-k)}$

За нивниот производ добиваме

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 q^{(k-1)} \cdot a_1 q^{(n-k)} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(k-1+n-k)} = a_1 \cdot \underbrace{a_1 q^{(n-1)}}_{a_n} = a_1 \cdot a_n, \text{ што требаше и да се покаже.}$$

Да ја разгледаме повторно истата геометриска прогресија но сега нека биде со бесконечно членови, т.е. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ..., 2^{n-1} , ...

Што е исполнето за членовите на оваа прогресија?

$$2^2 = 1 \cdot 4, \quad 4^2 = 2 \cdot 8, \quad 8^2 = 4 \cdot 16, \quad 16^2 = 8 \cdot 32, \dots$$

Воочуваме дека квадратот на секој член на прогресијата, освен првиот, е производ на неговите соседни членови.

Својство 2. Секој член од една геометриска прогресија, освен првиот, е геометриска средина од членот пред и членот после него во прогресијата.

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \text{ т.е. } a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}, \text{ за } k > 1, k \in N.$$

Доказ: Нека a_{k-1}, a_k, a_{k+1} се три последователни членови на една геометриска прогресија.

Според дефиниција за геометриска прогресија важи $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, од каде следува дека $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ т.е. $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$, за $k > 1, k \in N$, што требаше и да се докаже.

$$a_1 \neq -1, 1 \text{ и } q \neq -1.$$

Својството може обопшти и важи:

Својство 3. Секој член на геометриска прогресија е геометриска средина на секој пар членови од низата што се еднакво одалечени од него.

Да го разгледаме ова својство на геометриската прогресија 1, 2, 4, 8, $\boxed{16}$, 32, 64, 128, 256, ...

За бројот 16 важи: $16^2 = 8 \cdot 32$, $16^2 = 4 \cdot 64$, $16^2 = 2 \cdot 128$, $16^2 = 1 \cdot 256$, ...

Нека е дадена геометриска прогресија со $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ со количник q . Збирот на првите n членови на геометриската прогресија се означува со S_n е:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ т.е. } S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$a_1 \neq -1$, 1 и $q \neq -1$.

Пример 1. Да се определи збирот на првите 10 членови на геометриската прогресија 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...

Решение:

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

За да не се запишуваат сите членови на геометриската прогресија, па потоа да се определува нивниот збир, ќе ја запишеме формулата за збир на првите n – членови на геометриска прогресија.

Теорема: Збирот на првите n -членови на геометриска прогресија $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ се определува со:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Доказ:

Нека збирот на првите n – членови на геометриска прогресија е

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

и ако се замени формулата за n – от член на геометриската прогресија добиваме

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Ако равенството се помножи со q и се средат членовите добиваме

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Сега, ако од второто равенство ги одземеме соодветните страни од првото равенство, добиваме

$$qS_n - S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n - a_1 - a_1 q - a_1 q^2 - \dots - a_1 q^{n-2} - a_1 q^{n-1}, \text{ т.е.}$$

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1,$$

Следува $S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$.

Ако го изразиме S_n ја добиваме формулата за збирот на првите n – членови на

геометриска прогресија $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$, што требаше и да се докаже.

Пример 2. Одреди го збирот на првите 20 членови на геометриската прогресија 3,6,12,...

Решение: Од дадената прогресија може да определиме дека $a_1 = 3$ и $q = 2$. Со замена

во формулата $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ се добива,

$$S_{20} = 3 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 3(1048576 - 1) = 3\,145\,725.$$

Пример 3. Да се одреди првиот член на геометричка прогресија со количник $q = -\frac{1}{2}$,

ако збирот на првите десет членови е $\frac{1023}{512}$.

Решение: Од $S_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$ добиваме,

$$\frac{1023}{512} = a_1 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \frac{1023}{512} = a_1 \frac{1 - 1024}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1023}{512} = a_1 \frac{341}{512}, \text{ т.е. } a_1 = 3.$$

Пример 4. Збирот на првите шест члена на геометричка прогресија, со количник 3, изнесува 728. Пресметај го деветтиот член на геометриската прогресија..

Решение:

$$\text{Од } S_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} \text{ добиваме } 728 = a_1 \frac{3^6 - 1}{3 - 1} \Rightarrow 728 = a_1 \cdot 364, \text{ т.е. } a_1 = 2.$$

Деветиот член на геометриската прогресија ќе го определиме од формулата $a_9 = a_1 q^8$.

Со замена добиваме $a_9 = 2 \cdot 3^8 = 13\,122$.

Пример 5. Колку членови од геометриската прогресија треба да се соберат за да се добие збир 262145, ако првиот член е 5, а количникот е -4.

Решение: Од услов на задачата $S_n = 262145$, $a_1 = 5$ и $q = -4$, и со замена во формулата

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ добиваме } 262145 = 5 \cdot \frac{(-4)^n - 1}{-4 - 1}.$$

$$\text{Следува } 262145 = \frac{(-4)^n - 1}{-1} \Rightarrow -262144 = (-4)^n \Rightarrow (-4)^n = (-4)^9, \text{ добиваме } n = 9$$

Пример 6. Збирот на првите четири членови на една геометричка прогресија е 40, а збирот на следните четири е 3240. Одреди ги членовите на прогресијата.

Решение: Од условот на задачата имаме $S_4 = 40$ и $S_8 - S_4 = 3240$. Со примена на формулата за n -ти член на геометричка прогресија се добива системот равенки,

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \\ (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7) - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3) = 3240 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \\ a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = 3240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40 \\ a_1q^4(1 + q + q^2 + q^3) = 3240 \end{cases}$$

Ако ја поделиме втората со првата равенка добиваме

$$\frac{a_1q^4(1 + q + q^2 + q^3)}{a_1(1 + q + q^2 + q^3)} = \frac{3240}{40} \Rightarrow q^4 = 81, \text{ т.е. } q = \pm 3.$$

Следува, за $q = 3$, од првата равенка $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40$ имаме $a_1(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 40$, т.е. $a_1 = 1$. Геометриската прогресија е: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187.

Следува, за $q = -3$, од првата равенка $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40$ имаме $a_1(1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3) = 40$, т.е. $a_1 = -2$. Геометриската прогресија е: -2, 6, -18, 54, -162, 486, -1458, 4374.

Пример 7. Треба да се поделат 74 416 денари на 5 лица кои работеле на еден проект, така што секој нареден на списокот ќе добие 20% повеќе од претходното лице. Колку денари ќе добие секое лице?

Решение: Од условите на задачата имаме дека вкупната сума е $S_5 = 74416$, $n = 5$ и дека зголемувањето се одвива по принцип на геометричка прогресија, при што количникот ќе

го пресметаме според формулата $q = 1 + \frac{p}{100}$, каде $p = 20\%$, а за $q = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$.

Ако замениме во формулата за сумата $S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow 74416 = a_1 \frac{1,2^5 - 1}{1,2 - 1}$, тогаш

$$74416 = a_1 \cdot 7,4416, \text{ т.е. } a_1 = 10000$$

Добивме дека првото лице ќе добие 10 000 денари. Користејќи ја дефиниција за определување на n – от член на геометрииска прогресија може да ги добие вредностите за сумата која ќе ја добие секое лице, и тоа: Првото лице $a_1 = 10000$, Второто лице $a_2 = a_1 q = 10000 \cdot 1,2 = 12000$, третото лице $a_3 = a_2 q = 12000 \cdot 1,2 = 14400$, четвртото лице $a_4 = a_3 q = 14400 \cdot 1,2 = 17280$ и петото лице $a_5 = a_4 \cdot q = 17280 \cdot 1,2 = 20736$ денари.

Задачи за вежбање:

1. Последниот член на една геометрииска прогресија е 112, збирот на членовите е 217, додека количникот е 2. Да се пресмета првиот член.

2. Да се пресмета збирот на првите 10 членови на геометриската прогресија: -1, 3, -9, ...

3. Да се пресмета збирот на првите 8 членови на геометриската прогресијата 6, 12, 24, ...

4. Да се најде збирот на првите 15 членови на геометрииска прогресија со прв член $a_1 = -2$ и количник $q = 2$.

5. Автомобил е купен за 10 000 евра. Вредноста на автомобилот се намалува за 10% годишно, сметајќи од почетокот на годината.

Колку ќе чини автомобилот на крајот од 4 година?

Колку ќе чини автомобилот на крајот од 10 година?

6. Да се определат q и n во геометрииска прогресија за која што $a_1 = 2$, $a_n = 64$, $S_n = 126$

7. Пресметај ги a_n и n во геометрииска прогресија ако: $a_1 = 2$, $q = -3$, $S_n = -364$.

8. а) Пресметај ги a_1 и S_5 во геометрииска прогресија ако: $a_5 = \frac{2}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$.

б) Пресметај ги S_n и n во геометрииска прогресија ако: $a_1 = \frac{1}{64}$, $q = -\frac{4}{3}$, $a_n = -\frac{16}{243}$.

9. Пресметај ги a_1 , q и n во геометриската прогресија ако:

$$a_6 - a_4 = 216, a_3 - a_1 = 8, S_n = 40.$$

10. Три броја образуваат геометрииска прогресија. Нивниот збир е еднаков на збирот на нивните реципрочни вредности и изнесува $\frac{7}{2}$. Кои се тие броеви?

11. Цифрите на еден трицифрен број образуваат геометрииска прогресија. Збирот на првата и третата цифра е за 7 поголема од цифрата на десетките. Ако цифрите од бројот се запише во обратен редослед новиот трицифрен број ќе биде поголем за 792. Кој е тој број?

6. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА НИЗА

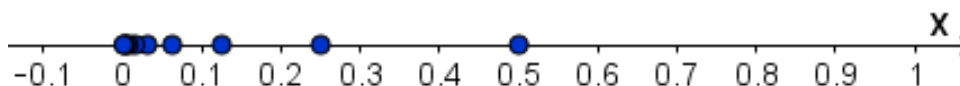
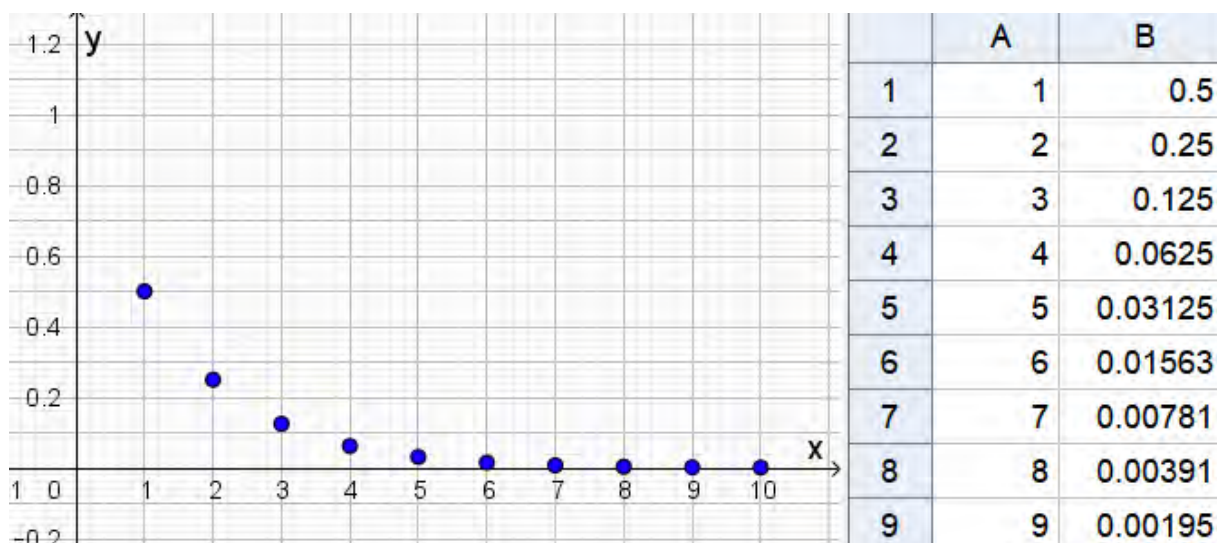
Што се случува со низата со општ член (a_n) кога n постојано расте?

Пример 1. Да се најдат првите пет членови од низите и да се претстават во координатен систем и на бројна оска:

а) $a_n = \frac{1}{2^n}$ б) $a_n = (-1)^n$ в) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ г) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ д) $a_n = 2^n$

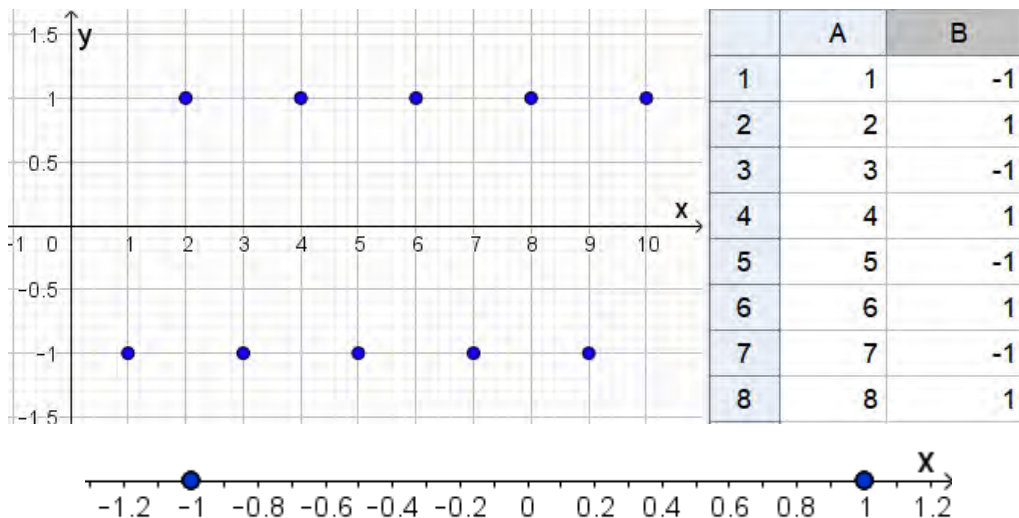
Решение:

а) Првите пет членови на низата со општ член $a_n = \frac{1}{2^n}$, се: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$, претставени во координатен систем и бројна оска се:



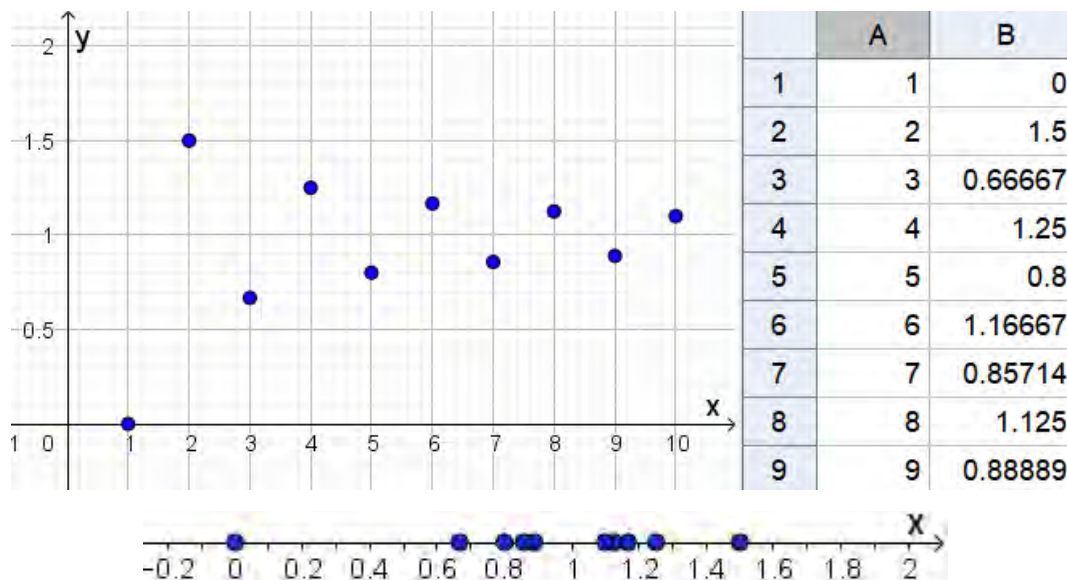
Можеме да забележиме дека како што расте вредноста на n членовите на низата стануваат се помали и се повеќе се приближуваат кон 0 на бројната оска, т.е. се натрупуваат околу 0. (во координатниот систем точките се доближуваат до x – оската)

б) Првите пет членови на низата со општ член $a_n = (-1)^n$, се: $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$, претставени во координатен систем и бројна оска се:



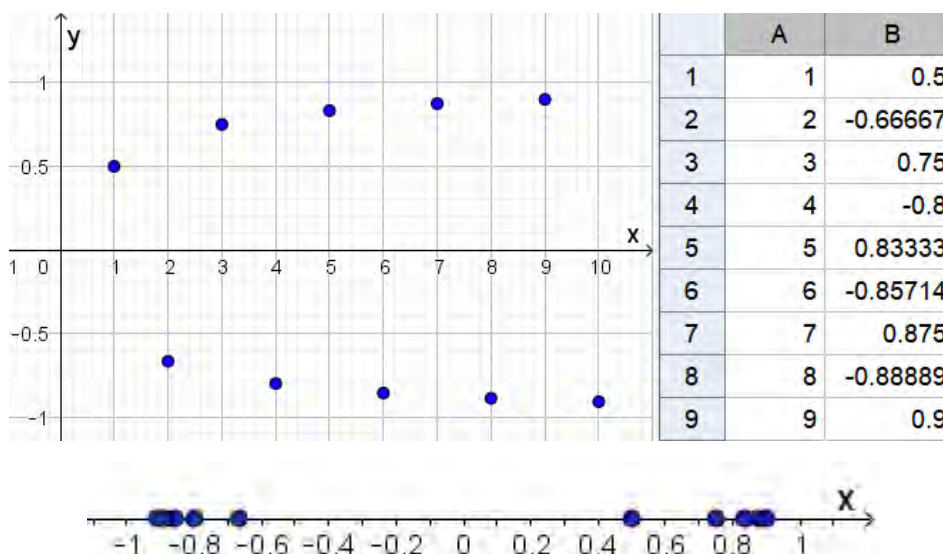
Можеме да забележиме дека како што расте вредноста на n членовите на низата се -1 или 1 , и тоа членовите со непарен индекс се -1 , а членовите со парен индекс се 1 . Членовите се натрупуваат во -1 или 1 на бројната оска. (во координатниот систем точките се со втора координата -1 или 1).

в) Првите пет членови на низата со општ член $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, се: $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, претставени во координатен систем и бројна оска се:



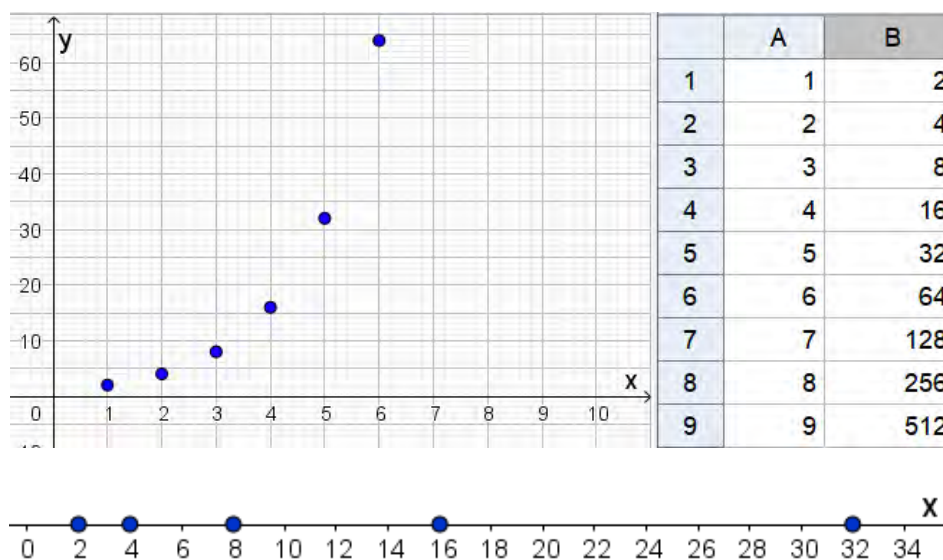
Може да забележиме дека со растење на вредноста на n , членовите на низата се распоредени наизменично од левата или десната страна на точката 1 , т.е. членовите се натрупуваат околу 1 . (во координатниот систем точките се доближуваат до правата $y = 1$).

г) Првите пет членови на низата со општ член $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$, се: $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$, претставени во координатен систем и бројна оска се:



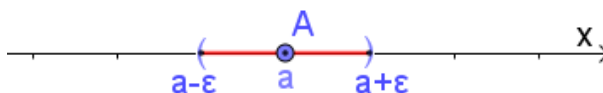
Можеме да забележиме дека како што расте вредноста на n членовите на низата се доближуваат кон 1 или -1, и тоа членовите со непарен индекс кон 1, а членовите со парен индекс кон -1. Членовите се натрупуваат во 1 или -1 на бројната оска. (во координатниот систем точките се доближуваат кон правите $y=1$ или $y=-1$).

д) Првите пет членови на низата со општ член $a_n = 2^n$, се: 2, 4, 8, 16, 32, ..., претставени во координатен систем и бројна оска се:



Можеме да забележиме дека како што расте вредноста на n , членовите на низата се поголеми, и нема точка кон која се натрупуваат. (во координатниот систем точките се одалечуваат од x -оската).

Дефиниција: Секој отворен интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, каде ε е позитивен реален број се вика **ε -околина на точката A** од бројната оска, односно ε -околина на реалниот број a , кој одговара на точка A .



Дефиниција: Реалниот број a е **точка на натрупување** на низата (a_n) ако за секој реален број $\varepsilon > 0$, бесконечно многу членови од низата припаѓаат на интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Од примерот 1,

низата под а) има една точка на натрупување 0, бидејќи бесконечно многу членови од низата припаѓаат на интервалот $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$

низата под б) има две точки на натрупување: -1 и 1, бидејќи бесконечно многу членови од низата има во интервалот $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ и во интервалот $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

низата под в) има една точка на натрупување 1, бидејќи бесконечно многу членови од низата припаѓаат на интервалот $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$

низата под г) има две точки на натрупување: 1 и -1, бидејќи бесконечно многу членови од низата има во интервалот $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ и во интервалот $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$, и

низата под д) нема точки на натрупување.

Заклучоците се добиени според визуелниот приказ и нема да се докажуваат.

Дефиниција: За низата (a_n) велиме дека е **конвергентна** (има **гранична вредност**) ако постои реален број $a \in \mathbb{R}$, т.ш. за секој $\varepsilon > 0$, постои природен број $n_0(\varepsilon)$ т.ш. при $n > n_0$ е исполнето неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$.

За реалниот број a велиме дека е **гранична вредност** на низата (a_n) и запишуваме $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0(\varepsilon)) |a_n - a| < \varepsilon$$

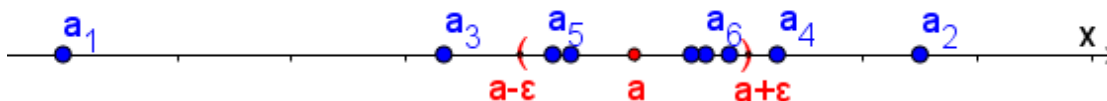
Може да се запише и еквивалентна дефиниција.

Дефиниција: Бројот a е гранична вредност на низата (a_n) кога n се стреми (тежи) кон бесконечност ако и само ако во произволна ε -околина на точката a се наоѓаат бесконечно многу членови од низата, а надвор од таа околина може да има само конечен број на членови.

Се запишува:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Од дефиницијата произлегува дека ако низата има гранична вредност, тогаш бесконечно многу членови после n_0 , почнувајќи од $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \dots$ се наоѓаат во внатрешноста на интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а само конечен број членови (првите n_0 - членови) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0}$ се надвор од овој интервал. Бројот a е истовремено и точка на натрупување на низата.



Дефиниција: Низата (a_n) која што не конвергира се нарекува неконвергентна низа.

За низата (a_n) која има гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ се нарекува дивергентна низа.

Однесувањето на низите во однос на конвергенција може да се види на следниот инфографик:

Низата			
Конвергира	Неконвергира		
	Дивергира	Неодредено дивергира	
	Дивергира кон $+\infty$	Дивергира кон $-\infty$	Осцилира конечно
			Осцилира бесконечно

Пример на неконвергентни низи:

За низата дадена со општ член $a_n = 2^n$, граничната вредност е $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$, низата **дивергира** кон $+\infty$.

За низата дадена со општ член $a_n = -2n$, граничната вредност е $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n) = -\infty$, низата **дивергира** кон $-\infty$.

За низата дадена со општ член $a_n = (-1)^n$, граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ не постои, вредностите на низата **осцилираат конечно** во -1 или 1.

За низата дадена со општ член $a_n = (-1)^n n$, граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$ не постои, вредностите на низата **осцилираат бесконечно** и се стремат кон $-\infty$ или $+\infty$.

Пример 2. Да се докаже по дефиниција дека граничната вредност на низата $\left(\frac{1}{n}\right)$ е 0, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ и за $\varepsilon = \frac{1}{10}$ да се определи бројот на членови кои се надвор од околината $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Решение: Дадена е низата со општ член $a_n = \frac{1}{n}$ и треба да се докаже дека граничната вредност на низата е $a = 0$.

Нека $\varepsilon > 0$ е доволно мал, произволно избран реален број. Тогаш од $|a_n - a| < \varepsilon$ се добива

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ т.е. } \frac{1}{n} < \varepsilon$$

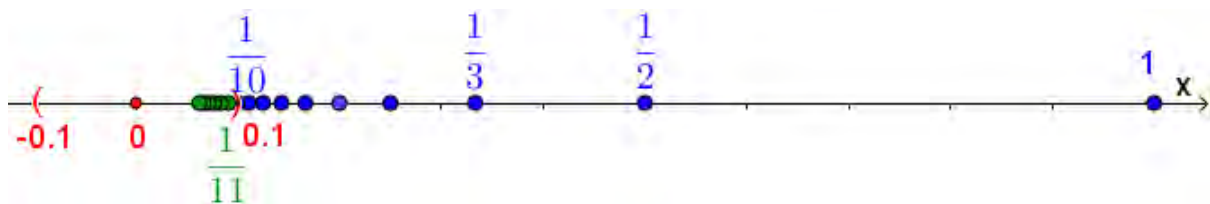
Следи дека $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ако $\frac{1}{\varepsilon}$ е природен број тогаш $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, или ако $\frac{1}{\varepsilon}$ е позитивен реален број тогаш

$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ (цел дел од позитивниот реалниот број).

За $\varepsilon = \frac{1}{10}$, добиваме $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$.

Членови со индекс помали или еднакви на 10, $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ се надвор од интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а членовите со индекс поголеми од 10, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ се во интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ т.е. членовите на низата $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{10}$ (конечен број членови од низата) се надвор од интервалот $\left(0 - \frac{1}{10}, 0 + \frac{1}{10}\right) = (-0,1; 0,1)$, и членовите $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots$ (бесконечно членови од низата) се во интервалот $(-0,1; 0,1)$.



Пример 3. Да се докаже по дефиниција дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ и за $\varepsilon = \frac{1}{100}$ да се определи бројот на членови кои се надвор од околината $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Решение: Треба да се докаже дека низата $a_n = \frac{n}{2n+1}$ има граница $a = \frac{1}{2}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е доволно мал, произволно избран реален број. Од $|a_n - a| < \varepsilon$ се добива

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{-1}{4n+2} \right| < \varepsilon,$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$$

Се добива дека $4n+2 > \frac{1}{\varepsilon}$ т.е. $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} = n_0(\varepsilon)$

$$\text{Ако } \varepsilon = \frac{1}{100}, \text{ тогаш } n_0 = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{1 - \frac{1}{50}}{\frac{1}{25}} = \frac{\frac{49}{50}}{\frac{1}{25}} = \frac{49}{2}, \text{ т.е. } n_0 = \left[\frac{49}{2} \right] = 24. \text{ Дваесет и}$$

четири членови од низата се наоѓаат надвор од интервалот $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}; \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \right) = (0,49; 0,51)$

а членовите со индекс 25 и поголем од 25 се во интервалот $(0,49; 0,51)$.

Пример 4. Дадена е низата $a_n = \frac{n}{4n+1}$. Да се покаже дека нејзината гранична вредност е $\frac{1}{4}$. За кои вредности на n е задоволено неравенството $\left| a_n - \frac{1}{4} \right| < 0,01$?

Решение: За да покажеме дека граничната вредност на низата зададена со нејзиниот општ член $a_n = \frac{n}{4n+1}$ има гранична вредност $\frac{1}{4}$, треба да покажеме дека $\left| a_n - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon$, каде $\varepsilon > 0$. Имаме:

$$\left| a_n - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{n}{4n+1} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{4n - 4n - 1}{4(4n+1)} \right| = \frac{1}{4(4n+1)}$$

$$\text{Од } \left| a_n - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon, \text{ следува } \frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon.$$

$$\frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < 4\varepsilon(4n+1) \Leftrightarrow 1 < 16n\varepsilon + 4\varepsilon \Leftrightarrow 16n\varepsilon > 1 - 4\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1 - 4\varepsilon}{16\varepsilon}.$$

Со замена за $\varepsilon = 0,01$ во последното неравенство се добива:

$$n > \frac{1 - 4 \cdot 0,01}{16 \cdot 0,01} = \frac{1 - 0,04}{0,16} = \frac{0,96}{0,16} = 6, \text{ т.е. } n_0 = 6$$

Даденото неравенство е задоволено почнувајќи од седмиот член на низата.

Пример 5. Да се определи граничната вредност на низата со општ член $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$.

Решение: Да запишеме неколку членови на низата со општ член $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$

$$n=1: \quad 2^1 = 2$$

$$\vdots$$

$$n=2: \quad 2^{\frac{1}{2}} = 1,41$$

$$n=10 \quad 2^{\frac{1}{10}} = 1,07$$

$$\vdots$$

$$n=3: \quad 2^{\frac{1}{3}} = 1,26$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ и } 2^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in N$$

$$\vdots$$

Од дефиниција за гранична вредност на низа следува:

$$\left| 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} \log 2 < \log(1 + \varepsilon)$$

$$2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon / \log$$

$$n > \frac{\log 2}{\log(1 + \varepsilon)}$$

Значи за секој $\varepsilon > 0$, постои природен број $n_0 = \frac{\log 2}{\log(1 + \varepsilon)}$ (кој е цел дел од n_0), така што за $n > n_0$, $|a_n - 1| < \varepsilon$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$

Напомена: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \forall a > 0$.

Теорема: Ако низата (a_n) е конвергентна, тогаш нејзината гранична вредност е **единствена**.

Теоремата ќе ја применуваме без доказ.

Задачи за вежбање:

- Дадена е низата $a_n = \frac{2n}{4n+1}$. Да се покаже дека нејзината гранична вредност е $\frac{1}{2}$.
Почнувајќи од кое n , е задоволена релацијата $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < 0,0001$?
- Дадена е низата $a_n = \frac{2n^2}{n^2-5}$. Да се покаже дека нејзината гранична вредност е 2.
Почнувајќи од кое n е задоволена релацијата $|a_n - 2| < 0,1$?
- Да се докаже по дефиниција граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ и за $\varepsilon = \frac{1}{100}$ да се определи бројот на членови кои се надвор од околината $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

4 Да се докаже по дефиниција граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$ и за $\varepsilon = \frac{1}{10}$ да се определи бројот на членови кои се надвор од околината $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

5. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на низа докажи го равенството $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$. Почнувајќи од кое n , е задоволена релацијата $|a_n - a| < 0,01$?

6. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на низа докажи го равенството $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 1} = 3$.

7. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на низа докажи го равенството $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3}{1 - 2n^2} = -\frac{5}{2}$. Почнувајќи од кое n , е задоволена релацијата $|a_n - a| < 0,01$?

8. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на низа докажи го равенството $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2}$. Почнувајќи од кое n , е задоволена релацијата $|a_n - a| < 0,01$?

9. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \frac{3}{5}$. Одреди го n така да биде исполнето неравенството $\left| a_n - \frac{3}{5} \right| < 0,001$.

10. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{2n} = -\frac{3}{2}$. Одреди го n така да биде исполнето неравенството $\left| a_n + \frac{3}{2} \right| < 0,1$.

11. Дадена е низата со општ член $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

а) Напиши ги првите шест членови на низата,

б) Претстави ги членовите на бројна оска,

в) Провери дали низата е монотона,

г) Провери дали низата е ограничена,

д) Докажи по дефиниција дека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$,

ѓ) За која вредност на n е исполнето $|a_n - 1| < 0,001$.

7. ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Во следниот дел ќе бидат конструирани низи чии членови се добиваат од членовите на конвергентни низи и ќе бидат дадени правилата за определување на нивните гранични вредности, знаејќи ги граничните вредности на конвергентните низи.

Теорема: Нека низите (a_n) и (b_n) се конвергентни и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тогаш и низите $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ се конвергентни и важи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{R}$$

Доказ:

Ќе докажеме само еден дел од теоремата, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$

Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и нека $\varepsilon > 0$.

За $n_1 \in \mathbb{N}$, сите членови на низата (a_n) се наоѓаат во ε -околина на a .

За $n_2 \in \mathbb{N}$, сите членови на (b_n) се наоѓаат во ε -околина на b .

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш за $n \geq n_0$ важи: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Од неравенството на триаголник имаме:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следува: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Со користење на теоремата и граничната вредност на низата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, може да се пресметува гранична вредност на низи, без да се докажува.

Пример 1. Пресметај ја граничната вредност на низата со општ член $a_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

Пример 2. Да се пресмета граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 4}$.

Решение: Ќе поделиме во броителот и именителот со највисокиот степен на n (или да извлечеме највисок степен на n пред заграда), а потоа ќе ја примениме теоремата.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + n}{n^2}}{\frac{3n^2 + 4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Да се пресмета граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n^2 + 3n}$.

Решение:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n - 1}{n^2}}{\frac{2n^2 + 3n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{0}{2 + 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Пример 4. Да се пресмета граничната вредност на низа со општ член $a_n = \frac{3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - n + 1}$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{2n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

Граничната вредност на геометриската низа (p^n) во зависност од вредноста на p е:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} \text{не постои,} & p \leq -1 \\ 0, & -1 < p < 1 \\ 1, & p = 1 \\ +\infty, & p > 1 \end{cases}$$

Пример 5. Со примена на граничната вредност на геометриската низа (p^n) да се

определи граничната вредност на низата со општ член $a_n = \frac{5^{n+1} + 7^{n+2}}{5^n + 7^{n+1}}$,

Решение:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+2}}{5^n + 7^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^n + 49 \cdot 7^n}{5^n + 7 \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5 \cdot 5^n + 49 \cdot 7^n}{7^n}}{\frac{5^n + 7 \cdot 7^n}{7^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 49 \cdot 1^n}{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7 \cdot 1^n} = \frac{5 \cdot 0 + 49 \cdot 1}{0 + 7 \cdot 1} = \frac{49}{7} = 7\end{aligned}$$

Пример 6. Пресметај ја граничната вредност на низата со општ член:

а) $a_n = \frac{1}{4^n}$

б) $a_n = \frac{1-2^n}{3+2^{n+1}}$

Решение:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$$\begin{aligned}\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{3+2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{3+2^n \cdot 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{\frac{3+2^n \cdot 2}{2^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \cdot 2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Пример 7. Да се пресметаат следниве гранични вредности на низите:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 7n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 5n + 8} \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{3n+1}{4n-3} \right) \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})$$

Решение:

$$\begin{aligned}\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 7n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 5n + 8} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{2n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} - \frac{7n}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} - \frac{5n}{n^3} + \frac{8}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{3n+1}{4n-3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(4n-3) - (3n+1)(n+1)}{(n+1)(4n-3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 6n - 3n^2 - 4n - 1}{(n+1)(4n-3)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 10n - 1}{4n^2 + n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{5n^2}{n^2} - \frac{10n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{4n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{3}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{10}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}) \cdot \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3})^2 - (\sqrt{2n})^2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = 0
 \end{aligned}$$

Пример 8. Пресметај ја граничната вредност на низата со општ член:

$$\text{а) } a_n = \frac{n+3}{\sqrt{n^2-7}}, \quad \text{б) } a_n = \frac{(n+1)^2 - (n+2)^2}{(n-1)^2 - (n-2)^2}, \quad \text{в) } a_n = \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!}$$

Решение:

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! + n!}{(n+1) \cdot n! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1+1)}{n!(n+1-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

При утврдување на конвергенција на низи, многу често се користи и постапката на сместување на членовите на една низа помеѓу членовите на две конвергентни низи кои имаат иста гранична вредност. Таа постапка е дадена во следната теорема.

Теорема: (Сендвич теорема): Нека (y_n) и (z_n) се низи за кои $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \in \mathbb{R}$. Ако за секој n важи $y_n \leq x_n \leq z_n$, тогаш и низата (x_n) има гранична вредност и притоа $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Пример 9: Да се пресмета граничната вредност на низата со општ член $x_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n}$.

Решение:

Нека $7^n \leq 5^n + 7^n \leq 7^n + 7^n$, т.е. $7^n \leq 5^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n$, следува $7 \leq \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 7$.

Бидејќи $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$, имаме $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{n}} \cdot 7 \right) = 1 \cdot 7 = 7$, и следува дека

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n} = 7.$$

Пример 10: Запиши неколку членови на низата со општ член $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, и одреди колку е граничната вредност.

Решение: Нека $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, тогаш

$$y_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0, y_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5, \dots, y_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0,9, \dots, y_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99,$$

кога $n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow 1$ со што заклучуваме дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$

Пример 11. Запиши неколку членови на низата со општ член $z_n = 1 + \frac{1}{n}$, и одреди колку е граничната вредност.

Решение: Нека $z_n = 1 + \frac{1}{n}$, тогаш

$$z_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, z_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5, \dots, z_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1,1, \dots, z_{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1,01,$$

кога $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow 1$ со што заклучуваме дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$

Во продолжение ќе видиме една карактеристична гранична вредност на низа.

Пример 12. Пресметај ја граничната вредност на низата со општ член $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

Решение: Нека $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, тогаш

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1} \right)^1 = 2, x_2 = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 2,25, \dots, x_{10} = \left(1 + \frac{1}{10} \right)^{10} = 2,59374246, \dots,$$

$$x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100} \right)^{100} = 2,70475832, \dots, x_{1000000} = \left(1 + \frac{1}{1000000} \right)^{1000000} = 2,71828314...$$

По интуиција може да се заклучи дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Оваа гранична вредност ќе ја користиме без доказ.

Забелешка:

Бројот e уште се нарекува Неперов број и служи како основа на природните логаритми.

Бројот e е ирационален број и неговата приближна вредност изнесува, $e \approx 2.72$

Првите 29 децимални цифри на бројот e се:

$$e \approx 2,718281828459045235360287471352$$

Пример 13. Определи ги граничните вредности со примена на $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$;

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{2n-2}$

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{2n-2} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{4n+1} \right]^{\frac{2n-2}{4n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-2}{4n+1}} = e^{\frac{1}{2}}$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2}{n-3} - 1\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2-n+3}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-3}\right)^n =$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-3}{5}}\right)^{\frac{n-3}{5}} \right]^{\frac{5n}{n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n-3}} = e^5$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{-2} = e \cdot 1^{-2} = e$$

$$\text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$$

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{n \cdot \frac{4}{4}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^4 = e^4$

$$\text{ф) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n$$

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3-2}{4n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{4n+3} - \frac{2}{4n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4n+3}\right)^n =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4n+3}{-2}}\right)^{\frac{4n+3}{-2} \cdot \frac{-2n}{4n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4n+3}{-2}}\right)^{\frac{-2n}{4n+3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2n}{4n+3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{4n+3}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

Задачи за вежбање:

Да се пресмета граничната вредност на низата зададена со општиот член:

$$1. a_n = \frac{4n-1}{2n+3},$$

$$2. a_n = \frac{7-5n}{10n}$$

$$3. a_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{n^2 - n + 4}$$

$$4. a_n = \frac{n^5 - 4}{n + 3n^5} \quad 5. a_n = \frac{3n - 2}{n^2 - 4n} \quad 6. a_n = \frac{5n^2 - 3n}{2 - 3n^3} \quad 7. a_n = \frac{(2n - 3)(4n + 1)}{5n - 4}$$

$$8. a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n}}{3n - 4} \quad 9. a_n = \frac{3^n + 5^{n+1}}{5^n - 3^{n+2}}$$

Да се пресмета граничната вредност:

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 3n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 2} \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-3n+2}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)! + (n+3)!}{(n+5)! - (n+3)!} \quad 17. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 3} - \sqrt{n^2 + 5n - 6})$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n$$

8. ЗБИР НА ЧЛЕНОВИ НА БЕСКОНЕЧНА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Да ја разгледаме бесконечната геометричка прогресија:

$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$ каде што a_1 е првиот член, а q е количникот на геометричката прогресија.

Формираме низа:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_1q,$$

$$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2,$$

...

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1},$$

...

Да претпоставиме дека низата (S_n) е конвергентна, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, каде што S е конечен реален број.

Дефиниција. Граничната вредност S на низата (S_n) се вика збир на бесконечна геометричка прогресија $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$

$$\text{Ако } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \text{ тогаш } a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots = S.$$

Ќе ги разгледаме неколку случаи во зависност од вредноста на количникот q , т.е. $|q| = 1$, $|q| < 1$ и $|q| > 1$, и $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$

1. Нека $|q| = 1$, т.е. $q = 1$ или $q = -1$

1.1. Ако $q = 1$, тогаш $S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \dots + a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1 \cdot n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$

1.2. Ако $q = -1$, тогаш,

$S_n = a_1 + a_1 \cdot (-1) + a_1 \cdot (-1)^2 + \dots + a_1 \cdot (-1)^{n-1} = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \dots + a_1 \cdot (-1)^{n-1}$ и во зависност од вредноста на n збирот ќе биде a_1 или 0 , и низата (S_n) има две точки на натрупување т.е. граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не постои.

2. Нека $|q| < 1$, тогаш збирот на првите n членови на бесконечната геометричка прогресија е

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{-1}{q - 1}, \text{ т.е. } S_n = a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{1}{1 - q}$$

$$\text{Од } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ кога } |q| < 1, \text{ добиваме } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{1}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Следува, низата (S_n) е конвергентна па збирот на членовите на бескрајната геометричка низа се запишува скратено како

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ за } |q| < 1.$$

3. Нека $|q| > 1$, тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, и низата (S_n) е дивергентна.

Добивме, за $|q| > 1$ збирот на бескрајната геометричка прогресија не постои.

Пример 1. Да го определиме зборот на геометричката прогресија $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$

Решение: Бидејќи $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, т.е. $|q| < 1$ тогаш збирот на прогресијата е

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Пример 2. Да го определиме збирот $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

Решение: Ако го разгледаме збирот како членови на бесконечна геометричка прогресија, тогаш $a_1 = \frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{2}$, т.е. $|q| < 1$ и збирот ќе го пресметаме

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Пример 3. Да го претставиме периодичниот децимален број $0,777\dots$ како збир на членови од бесконечна геометричка прогресија, а потоа да се пресмета тој збир.

Решение: Бидејќи,

$$\begin{aligned} 0,777... &= 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \\ &= 7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... \right) = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Пример 4. Да го претставиме како нескратлива дробка бројот $21,3(54)$.

Решение: Бидејќи,

$$\begin{aligned} 21,3(54) &= 21,3545454... = 21 + 0,3 + 0,054 + 0,00054 + ... = \\ &= 21 + \frac{3}{10} + \frac{54}{10^3} + \frac{54}{10^5} + \frac{54}{10^7} + ... = 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \\ &= 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{\frac{99}{100}} = 21 + \frac{3}{10} + \frac{6}{11 \cdot 10} = \\ &= \frac{21 \cdot 110 + 3 \cdot 11 + 6}{11 \cdot 10} = \frac{2349}{110} \end{aligned}$$

Пример 5. Да го докажеме равенството $2 + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{128}{125} + ... = 15 - \frac{15}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{8} + ...$

Решение: Најпрво, треба да го пресметаме збирот на двете бесконечни геометриски прогресии поединечно.

На левата страна имаме збир на бесконечна геометриска прогресија со $a_1 = 2$, $q = \frac{4}{5}$

$$\text{и } 2 + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{128}{125} + ... = \frac{2}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$$

На десната страна имаме збир на бесконечна геометриска прогресија со $a_1 = 15$,

$$q = -\frac{1}{2} \text{ и } 15 - \frac{15}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{8} + \dots = \frac{15}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{15}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = 10$$

Се добива дека збирот на двете бесконечни геометриски прогресии е еднаков, со што е докажано равенството.

Пример 6. Збирот на бескрајната геометриска прогресија е 4, а вториот член $a_2 = \frac{3}{4}$. Одреди ја геометриската прогресија.

Решение: Од условот на задачата $S = 4$, т.е. $\frac{a_1}{1-q} = 4$ и $a_2 = \frac{3}{4}$ т.е. $a_1 q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Се добива систем равенки: } \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 4 \\ a_1 q = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 4q \\ 4a_1 q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 4q \\ 4(4 - 4q)q = 3 \end{cases}$$

Од втората равенка добиваме $16q - 16q^2 = 3$, т.е. $16q^2 - 16q + 3 = 0$.

Добивме две решенија за количникот $q' = \frac{1}{4}$ и $q'' = \frac{3}{4}$.

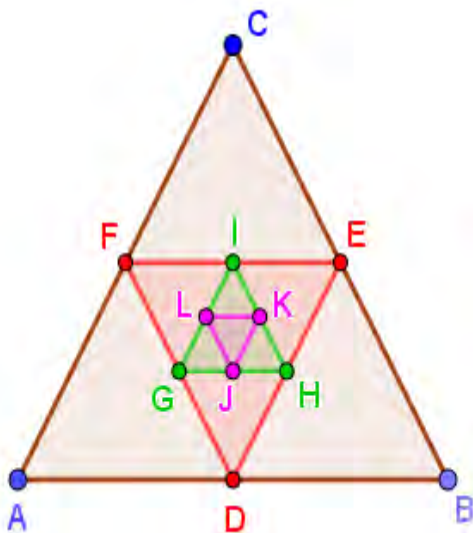
Со замена во првата равенка $a_1 = 4 - 4q$, добиваме:

- за првото решение $a_1' = 4 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$, т.е. геометриската прогресија е $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots$,

- за второто решение $a_1'' = 4 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1$, т.е. геометриската прогресија е $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots$

Пример 7. Во рамностран триаголник со страна a е впишан рамностран триаголник чии темиња се средини на страните на првиот триаголник, во вториот на сличен начин е впишан трет и.т.н. Пресметај го збирот од периметрите на сите триаголници.

Решение: Да направиме скица на првите четири триаголници што се добиваат,



Страната на првиот триаголник е a , и неговиот периметар е $L_1 = 3a$.

Вториот триаголник се добива од средните линии на првиот триаголник, од каде следи дека страната на вториот рамностран триаголник е $\frac{a}{2}$, и неговиот периметар е

$$L_2 = 3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Третиот триаголник се добива од средните линии на вториот триаголник, од каде следи дека страната на сличниот триаголник е $\frac{a}{2} = \frac{a}{4}$, и неговиот периметар е $L_3 = 3 \cdot \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$.

На сличен начин се добива $L_4 = \frac{3a}{8}$, и.т.н.

Збирот од периметрите на сите триаголници е:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + \dots = 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3a}{\frac{1}{2}} = 6a$$

Пример 8. Одреди ја вредноста на изразот $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}}$

Решение: Користејќи својства на корени се добива:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}\dots = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{16}}\dots = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots} = 2^{1 - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2\end{aligned}$$

Задачи за вежбање:

- Пресметај го збирот $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$
- Пресметај го збирот $5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \dots$
- Пресметај го збирот $4 + 7 + \frac{8}{3} + \frac{35}{8} + \frac{16}{9} + \frac{175}{64} + \dots$
- За бесконечната геометричка прогресија е дадено $S = 10$ и $a_1 = 6$. Одреди го количникот q .
- За бесконечната геометричка прогресија е дадено $S = 25$ и $q = \frac{4}{5}$. Одреди го првиот член a_1 .
- Во рамностран триаголник со страна 2 е впишан рамностран триаголник чии темиња се средини на страните на првиот триаголник, во вториот на сличен начин е впишан трет и.т.н. Пресметај го:
 - збирот од плоштините на сите триаголници,
 - збирот од периметрите на сите триаголници.
- Пресметај ја вредноста на изразот $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5}\dots}}$
- Пресметај ја вредноста на изразот $3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7}\dots}}}}$
- Бројот $3,252525\dots$ претстави го како збир на членови на бесконечна геометричка прогресија, а потоа пресметај го збирот.
- Со користење на збир на бесконечна геометричка прогресија претстави го како некратлива дробка $4,35(6)$
- Со користење на збир на бесконечна геометричка прогресија претстави го како некратлива дробка $3,4(25)$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА:

1. Да се определи монотоност и ограниченост на низата зададена со општ член

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

2. Да се определи монотоност и ограниченост на низата зададена со општ член

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 - 2}$$

3. Меѓу броевите 2 и 26 вметни пет броеви, кои заедно со дадените образуваат аритметичка прогресија.

4. Првиот член на една геометричка прогресија е 1, количникот е 2. Еден нејзин член е 512. Кој член по ред е тој?

5. Најди ја геометричката прогресија ако $a_5 - a_3 = 36$ и $a_2 - a_4 = -18$.

6. Во градот постојат две такси компании со различен тарифен модел на наплаќање:

А: 100 денари старт,
50 денари по километар

Б: 0 денари старт,
60 денари по километар

Кој такси превозник да го одбере Марко ако до работно место има 7 километри.

Упатство: Запишете низа од броеви во зависност од поминатите километри. (по 10 членови)

Каква прогресија претставува низата?

7. Сакате да вложите 2000 евра во банка.

Во првата банка ви е понудено секој месец да добивате камата од 3%.

Во втората банка ви е понудено камата од 2%, но секој месец главнината се зголемува за износот на каматата.

Колку пари ќе имате на сметка на крајот од првата година по двата модела?

Колку пари ќе имате на сметка на крајот од петтата година по двата модела?

Во која банка да ги вложите парите? Дали изборот ќе зависи од бројот на години.

8. За време на летниот распуст Игор сака да работи 14 денови во пицерија. Сопственикот на пицеријата му дал два начини на заработка

А: 100 денари – 1 ден

Б: 1 денар – 1 ден

200 денари – 2 ден

2 денари – 2 ден

300 денари – 3 ден

4 денари – 3 ден

400 денари - 4 ден

8 денари - 4 ден

...

...

а) Кој модел да го одбере Игор?

б) Пресметајте колку ќе заработи Игор по двата модели посебно?

9. Сумата од 50 000 денари е поделена на 10 лица така што секој нареден добива 1000 денари помалку од претходниот.

Колку денари добило првото, а колку последното лице?

10. Во некоја култура, првично имало 30 бактерии и нивниот број се удвојувал секој час. Колку бактерии ќе бидат присутни во културата после вториот, четвртиот и деветтиот час?

11. Тадеј има 2 родители, 4 баби и дедовци, 8 прабаби и прадедовци итн. Колку предци има Тадеј во текот на петте генерации пред неговата?

Колку генерации на ваши претци знаете вие? Во табела запишете ги нивите имиња.

12. Од столб висок 24 метри паѓа топка и при секое скокање достигнува $\frac{3}{4}$ од паднатото растојание. Колкав пат поминува топката пред конечно да застане на земјата?

13. Почетната цена на новата крипто валута е 5 долари. Колку е цената на крипто валутата по 16 дена, ако таа се зголемува секој ден за 2 долари?

14. Познат рок бенд издаде нов албум и во еден ден се продале 100000 примероци. Албумот е на врвот на сите топ листи и секој ден се продаваат 20000 примероци повеќе од претходниот ден. Колку примероци од албумот се продадени за една недела?

15. Популацијата на диви животни во Националниот парк Галичица, секоја година се зголемува за 2%. Колку ќе биде популацијата на диви животни во 2022 година, ако во 2015 популацијата е 1000 ?

16. Еден сид има 60 тули во првиот ред, а секој следен има 3 тули помалку од претходниот. Колку тули има во десетиот ред?

17. Авди сака да направи пирамида од тули користејќи ја дадената шема, но сака на основата да има 12 тули.

Колку тули му требаат на Авди за да ја направи пирамидата?

Колку редови ќе има пирамидата?



18. Страните на еден триаголник се членови на една геометричка прогресија. Најди ги страните на триаголникот ако неговиот периметар е 19, а збирот на квадратите на страните е 133.

19. Пресметај: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{5^n - 2^{n+2}}$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n^2 + 3n} - \frac{1}{n^2} \right)$

20. Претстави го периодичниот децимален број $0,124124124\dots$ како збир на членови од бесконечна геометричка прогресија и потоа пресметај го тој збир.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 2

ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Во оваа модуларна единица ќе научиш за:

Поим за функција (дефинициона област, график, множество вредности, нули, монотоност, конвексност)

Линеарна функција

Квадратна функција

Степенска функција со природен експонент, со рационален експонент, т.е. со реален експонент

Експоненцијална функција.

Логаритамска функција

Поим за инверзна функција

Поим за периодичност на функција.

Основни тригонометриски функции

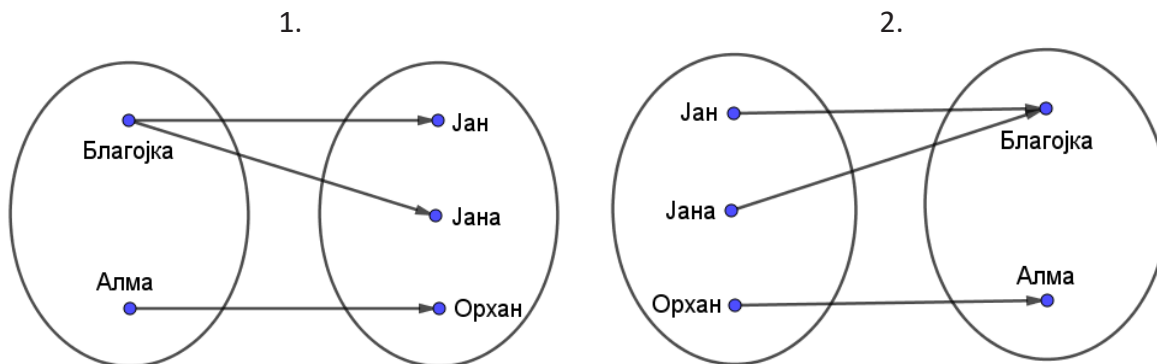
ЕЛЕМЕНТАРНИ РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

1. ПОИМ ЗА ФУНКЦИЈА

Во продолжение ќе ги разгледаме основните својства (особини) на функциите.

Пример 1. Благојка е мајка на близанците Јан и Јана, а Орхан е син на Алма. На првиот дијаграм на секоја мајка е придружено нејзиното дете. На вториот дијаграм на секое дете му е придружена неговата мајка. Со кој дијаграм е претставено пресликување?

Решение:



Дефиниција: Нека A и B се две непразни множества и нека на секој елемент $x \in A$ му придружиме по некое правило f , еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека е определено **пресликување** f од A во B и запишуваме $f: A \rightarrow B$.

Користејќи ја дефиницијата за пресликување, може да донесеме залучок дека со дијаграмот 2 е претставено пресликување.

Дефиниција: Нека X и Y се подмножества од множеството на реални броеви R . Секое пресликување $f: X \rightarrow Y$ со кое на секој елемент x од X му придружуваме точно еден елемент y од Y се нарекува **реална функција**. Ознака: $y = f(x)$.

Дефиниција: **График** на функцијата $f: X \rightarrow Y$ е множеството од сите подредени парови $G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$.

Елементите на множеството X се нарекуваат аргументи, (оригинали, независни променливи).

$f(x) \in Y$ се нарекуваат слики (зависни променливи)

Функциите може да се претставуваат аналитички (со формула, алгебарски запис), табеларно, со дијаграм или графички.

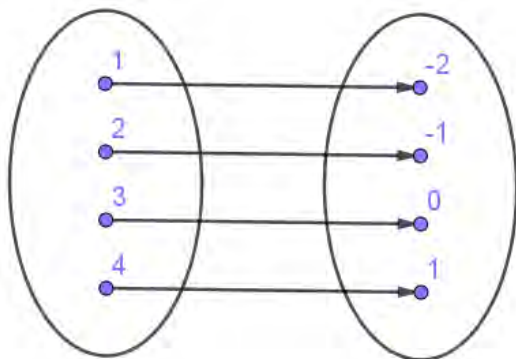
Пример 2. Природните броеви од множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$ да се намалат за 3. Да се одреди и запише функција аритметички (со правилото на придружување), табеларно, со дијаграм и графички.

Аналитички приказ на функцијата

$$f(x) = x - 3, \text{ за } A = \{1, 2, 3, 4\}, f : A \rightarrow B$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1\}$$

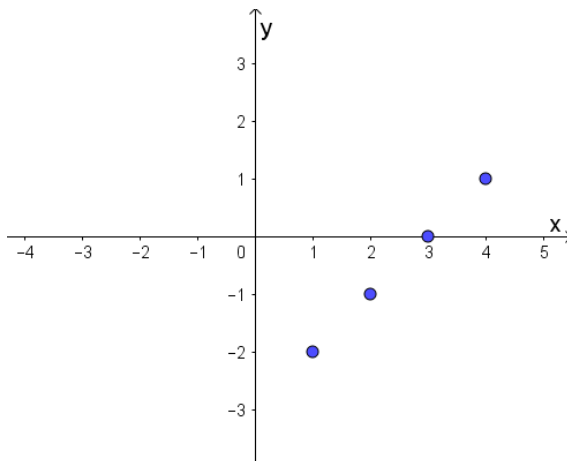
Функцијата е претставена со дијаграм



Табеларен приказ на функцијата

x	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1

Графички приказ на функцијата



1.1. ДЕФИНИЦИОНА ОБЛАСТ НА ФУНКЦИЈА

Дадена е **реалната функција** $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Множеството реални броеви $D_f = X$ од кое аргументот на функцијата прима вредности, т.е. за кои е дефинирана функцијата се нарекува **дефинициона област (домен)** на функцијата f и се означува со D_f .

Множеството $V_f \subseteq Y$ е **множество од вредности на функцијата f (кодомен)**, се состои, од сите слики на елементите од дефиниционото множество $V_f = \{y | y = f(x), x \in X\}$.

Забелешка: Функцијата $y = f(x)$ е дефинирана (определена) за една вредност $x = a$, значи дека постои $f(a)$ и таа вредност може да се одреди согласно правилото на придружување. Ако функцијата е дефинирана за секоја вредност од интервалот (a, b) тогаш велиме дека функцијата е дефинирана на тој интервал. Дефиниционата област се определува во зависност од аналитичкиот израз со кој е зададена функцијата. Дефиниционата област на функција може да биде множеството реални броеви или некое негово подмножество како интервал (отворен, затворен, полуотворен или полузатворен), унија од интервали или од изолирани точки.

Функцијата $f(x)$ е напoлно определена ако се познати: дефиниционата област D_f и правилото f според кое се одредува вредноста на функцијата.

Во пракса, ако дадената функција е определена со некој аналитички израз без да биде назначен доменот, ќе се смета дека доменот се состои од сите реални броеви за коишто тој аналитички израз има смисла.

Во продолжение да ги видиме дефиниционите области на некои карактеристични функции.

Дефинициони области на некои карактеристични функции

1.1.1. Дефинициона област на полиномна функција

Ако функцијата $f(x)$ е зададена со полином, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, каде n е ненегативен цел број, тогаш нејзината дефинициона област е целото множество R или $D_f = (-\infty, +\infty)$.

Пример 1. Функциите:

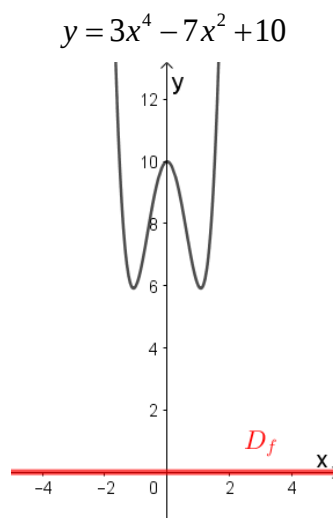
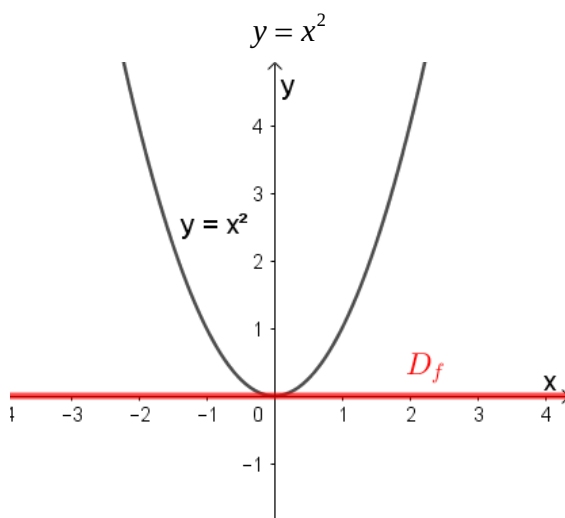
$$y = x^2,$$

$$y = 3x^4 - 7x^2 + 10,$$

$$y = -25x^7 + 4,5x^6 + x^3 - 12x + 5,$$

се дефинирани за секој реален број и нивната дефинициона област е $D_f = (-\infty, +\infty)$ или $D_f = R$.

На цртежите графички се претставени дефиниционите области на првите две полиномни функции.



Забелешка: Со црвената линија се претставени дефиниционите области, т.е. вредностите на x за кој може да се пресмета вредноста на функцијата.

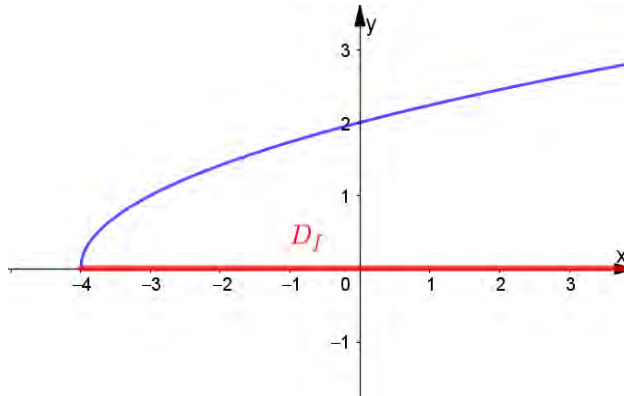
1.1.2. Дефинициона област на функцијата со парен коренов показател

Ако функцијата се наоѓа во подкоренов израз со парен коренов показател, $y = \sqrt[k]{f(x)}$, $k \in N$, тогаш дефиниционата област се определува од неравенството $f(x) \geq 0$.

Пример 2. Да се определи дефиниционата област на функцијата $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Решение: Дефиниционата област се определува од условот $x + 4 \geq 0$.

Со решавање на оваа неравенка се добива $x \geq -4$ и дефиниционата област е $D_f = [-4, +\infty)$



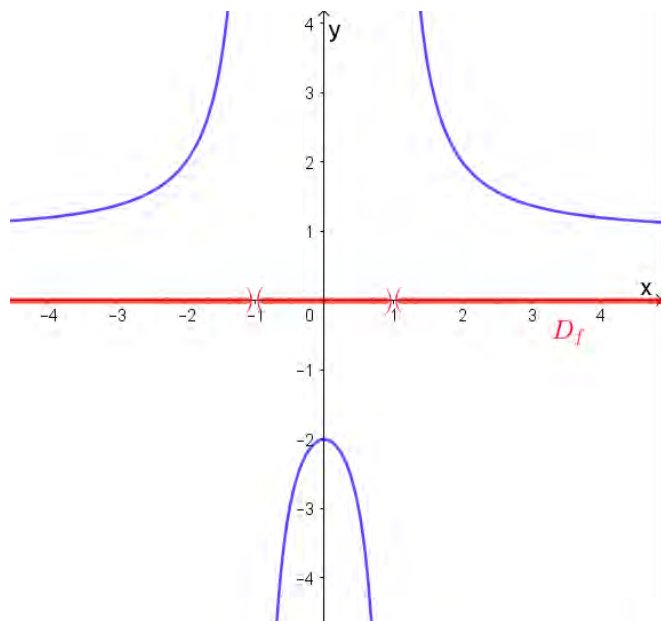
Забелешка: Дефиниционата област на функцијата која има непарен коренов показател е множеството на реални броеви.

1.1.3. Дефинициона област на дробно рационална функција

Дефиниционата област на функцијата $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, се определува од условот $g(x) \neq 0$, бидејќи делењето со 0 не е дефинирано.

Пример 3. Да се определи дефинициона област на функцијата $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

Решение: Дефиниционата област се определува од условот $x^2 - 1 \neq 0$,
 следува $x^2 \neq 1$ или $x \neq \pm 1$, што значи дека од множеството на реални броеви се отфрлаат двете точки $x = \pm 1$ т.е. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ или функцијата е дефинирана на три интервали $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.



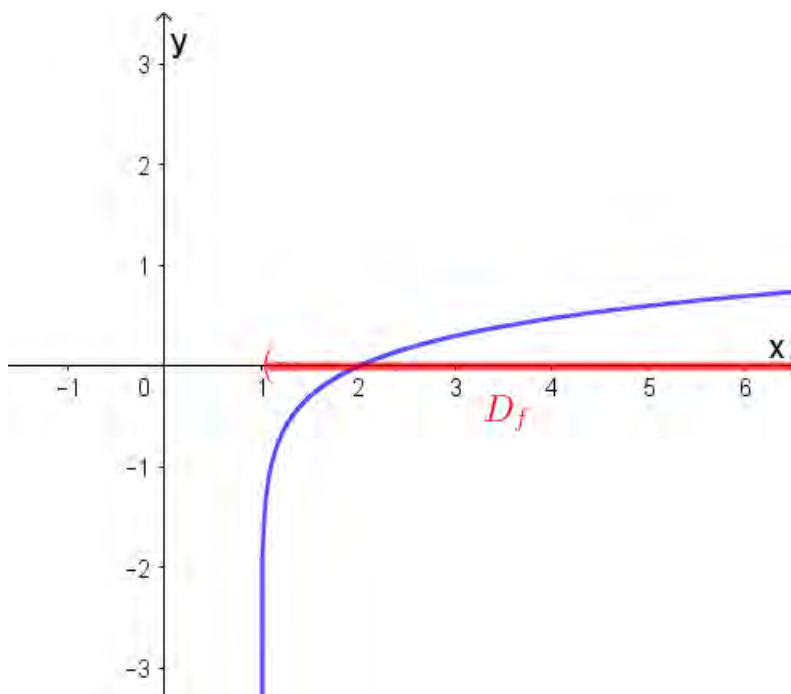
1.1.4. Дефинициона област на логаритамска функција

Дефиниционата област на логаритамската функција $y = \log_a f(x)$ се определува од неравенството $f(x) > 0$, бидејќи логаритмите се дефинираат само за позитивните реални броеви.

Пример 4. Да се определи дефиниционата област на функцијата $f(x) = \log(x-1)$.

Решение: Дефиниционата област се определува со решавање на неравенката $x-1 > 0$.

Се добива дека $x > 1$ и се определува дефиниционата област е $D_f = (1, +\infty)$.



Задача 1. Одреди го дефиниционото множество на функциите:

а) $f(x) = x^3 - 3x$

б) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$

в) $y = \log(4-x)$

г) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

д) $f(x) = \sqrt{5-3x}$

ѓ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4x+3}$

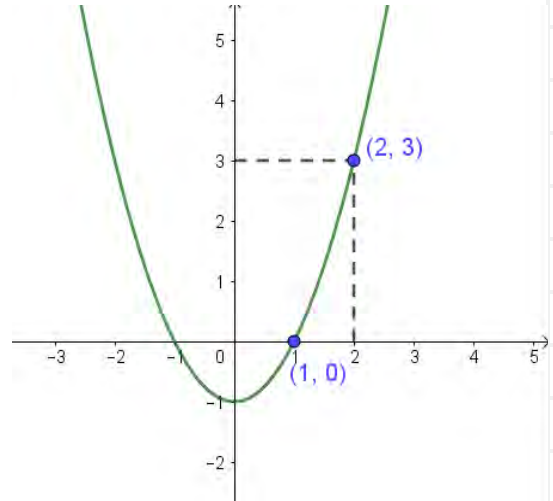
1.2. НУЛИ НА ФУНКЦИЈА

Пример 1. Дадена е функцијата $f(x) = x^2 - 1$. Определи ги вредностите на функцијата за $f(1)$ и $f(2)$.

Решение: Ги наоѓаме вредностите на $f(1)$ и $f(2)$.

$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, се добива точка со координати $(1, 0)$ која припаѓа на графикот на функцијата.

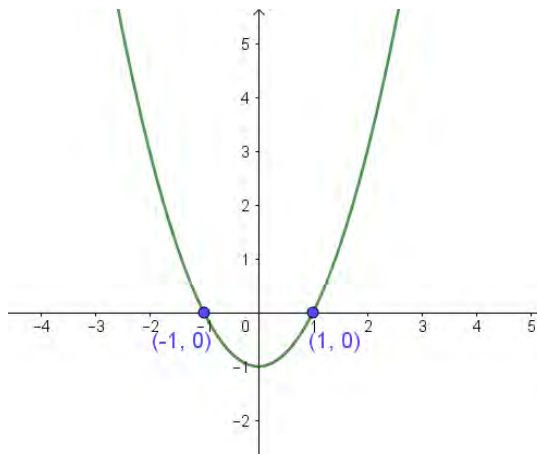
$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, се добива точка со координати $(2, 3)$ која припаѓа на графикот на функцијата.



Секој реален број $x_0 \in D_f$ за кој важи $f(x_0) = 0$ се вика **нула** на функцијата.

Нулите на функцијата се решенија на равенката $f(x) = 0$.

Со решавање на равенката $f(x) = 0$, т.е. $x^2 - 1 = 0$, се добиваат решенијата $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, кои се и нули на функцијата.



Дефиниција: Нули на функцијата $f : X \rightarrow Y$ се нарекуваат оние вредности на $x \in D_f$ за кои $f(x) = 0$. Тоа се точки со координати $(x, 0)$ во кои графикот на функцијата ја сече x -оската. Множеството нули на дадена функција ќе го означиме со N_f .

Вредноста на функцијата $y = f(x)$ за аргументот $x = 0$ е втората координата на пресечна точка на графикот на функцијата со у-оската. Координатите на точката се $(0, y)$.

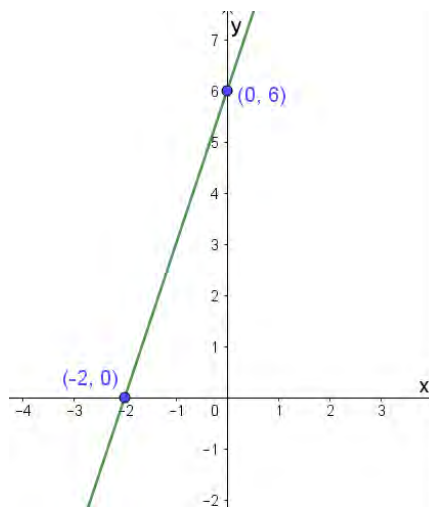
Забелешка: Функцијата која е еднозначно определена може да има повеќе пресечни точки со x -оската, а најмногу една пресечна точка со у-оската.

Пример 2. Да се најдат нулите на функцијата $f(x) = 3x + 6$ и да се определи пресекот на графикот на функцијата со у-оската.

Решение: Нули на функцијата се оние вредности на x за кои $f(x) = 0$, од каде следи дека $3x + 6 = 0$. Решение на равенката е $x = -2$. Множеството нули на функцијата е $N_f = \{-2\}$.

За да се најде пресекот на функцијата со у-оската треба да замениме $x = 0$, па се добива $f(0) = 3 \cdot 0 + 6 = 6$. Координатите на пресечната точка на функцијата со у-оската е $(0, 6)$. Пресечна точка на функцијата со x -оската е точката со координати $(-2, 0)$.

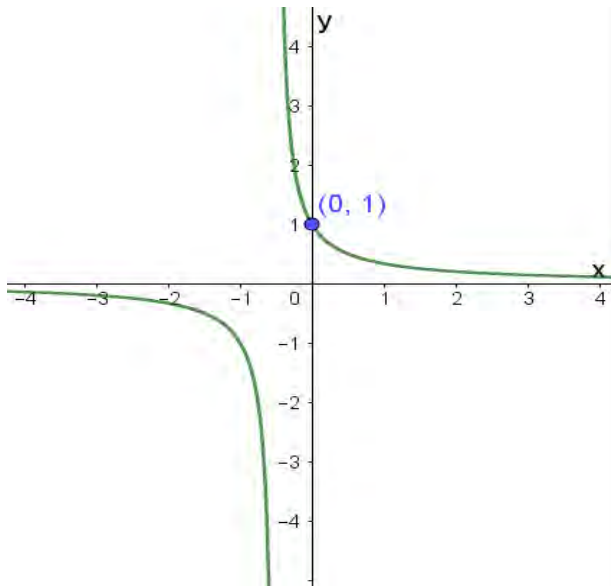
Графички приказ на функцијата



Пример 3. Да се определат нулите на функцијата $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, и да се најде пресекот на функцијата со у-оската.

Решение: Од $f(x) = 0$, следува $1 = 0$, што не е точно и се заклучува дека равенката нема решение.

Множеството нули е $N_f = \emptyset$ односно функцијата не ја сече x -оската.



Ако замениме за $x = 0$, се добива $f(0) = \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$. Координатите на пресечната точка со у-оската се $(0, 1)$.

Задача 2. Одреди ги нулите на функциите:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

б) $y = x^3 - x$

в) $f(x) = 2^{x+5}$

г) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

д) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

ѓ) $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$

1.3. ПАРНОСТ НА ФУНКЦИЈА

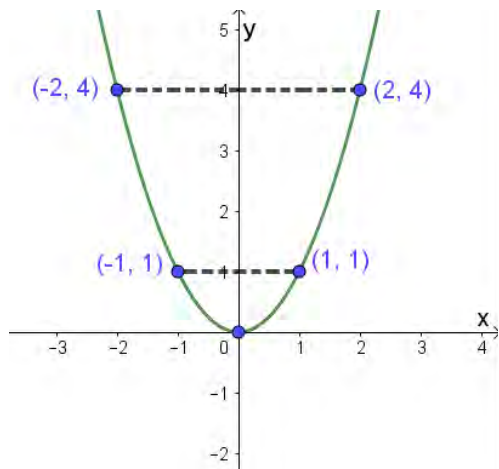
Пример 1. На сликата е даден графикот на функцијата $f(x) = x^2$.

Што може да воочиме за вредностите $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$. Се добива дека $f(1) = f(-1) = 1$, $f(2) = f(-2) = 4$.

Воопшто за дадената функција

$$f(-x) = f(x), \text{ за секој } x \in D_f.$$

Графикот на функцијата $f(x) = x^2$ е симетричен во однос на у-оската.



Дефиниција. Функција $f: X \rightarrow Y$ со дефинициона област D_f (кое е симетрично множество во однос на координатниот почеток, т.е. за секој $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$),

- е **парна** ако за секој $x \in D_f$, важи $f(-x) = f(x)$,
- е **непарна** ако за секој $x \in D_f$, важи $f(-x) = -f(x)$.

Забелешка: За испитување на парноста на функциите, прво треба да биде исполнет условот за симетричноста на дефиниционата област. (D_f е симетрична област ако за секој $x \in D_f$, тогаш и $-x \in D_f$).

Забелешка:

Графикот на парната функција е симетричен во однос на у-оската.

Графикот на непарната функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

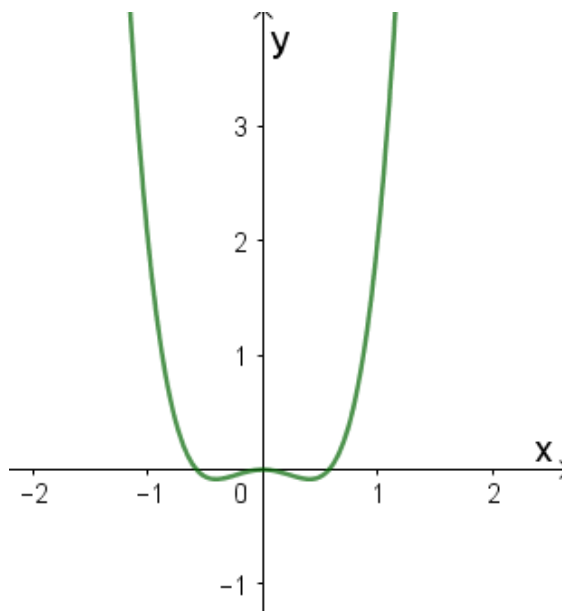
Постојат и функции кои се ниту парни, ниту непарни.

Пример 2. Да се определи парноста на функцијата $f(x) = 3x^4 - x^2$.

Решение: Дефиниционата област е $D_f = R$ и е симетрична област.

$$f(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 = 3x^4 - x^2 = f(x)$$

Следува дека, функцијата е парна. Графикот е симетричен во однос на у-оската.

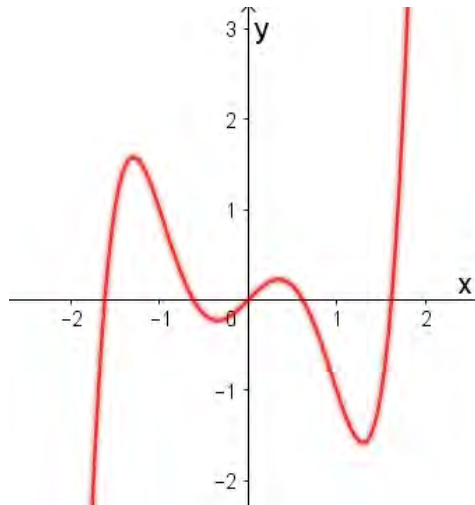


Пример 3. Да се определи парноста на функцијата $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$.

Решение: Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$, која е симетрична област.

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 3x^3 - x = -(x^5 - 3x^3 + x) = -f(x)$$

Следува дека, функцијата е непарна. Графикот на функцијата е симетричен во однос на координатниот почеток.



Задача 3. Испитај ја парноста на функциите:

а) $f(x) = 3x^2 - 1$

б) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{x}$

в) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

г) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

д) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ѓ) $f(x) = 3x^5 + 2x^7$

1.4. ОГРАНИЧЕНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Дефиниција: Дадена е функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. За функцијата $f(x)$ велиме дека е:

- Ограничена од горе ако постои реален број M таков што $f(x) \leq M$ за секој x од дефиниционата област на $f(x)$,
- Ограничена од долу ако постои реален број m таков што $f(x) \geq m$ за секој x од дефиниционата област на $f(x)$,
- Ограничена, ако постојат реални броеви m и M такви што $m \leq f(x) \leq M$ за секој x од дефинициона област на $f(x)$, т.е. ако функцијата е ограничена од горе и долу.

Пример 1. Да се утврди дали функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ е ограничена од долу!

Решение: За секој реален број x , $x^2 \geq 0$.

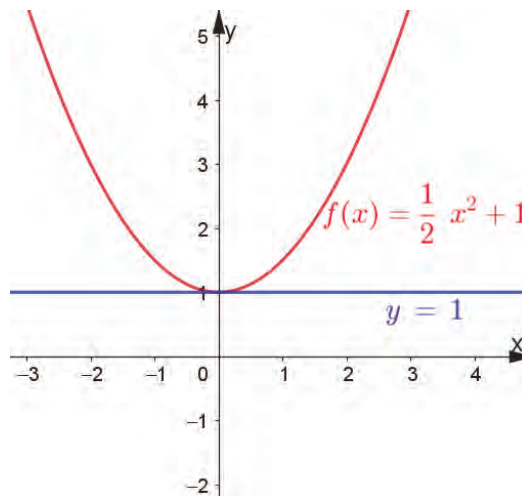
$$\text{Од, } x^2 \geq 0 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x^2 \geq 0 \quad / +1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 0 + 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 1 \text{ т.е. } f(x) \geq 1$$

Следува, функцијата е ограничена од долу со 1.



Задача 4. Докажи дека функциите се ограничени:

а) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ б) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Докажи дека функциите се ограничени од горе:

в) $f(x) = 1 - x^2$ г) $f(x) = 1 - 2^x$

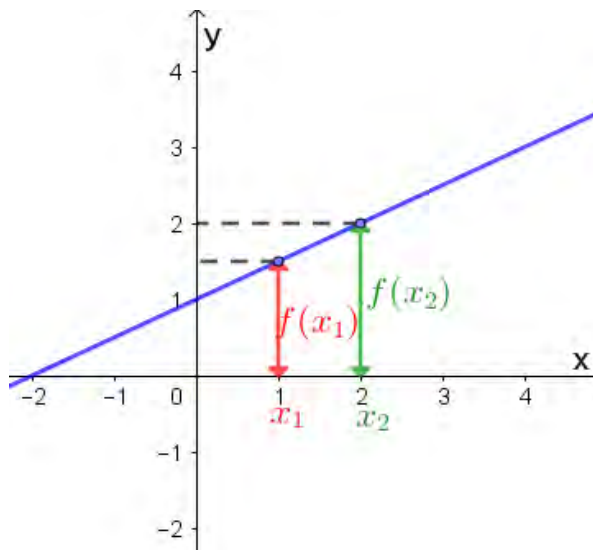
Докажи дека функциите се ограничени од долу:

д) $f(x) = x^2 - 4$ е) $f(x) = 3^{x+2}$

1.5. МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА

На цртежот е претставен графикот на функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Дефиниционата област на функцијата е $D_f = \mathbb{R}$.

За секои две различни вредности x_1 и x_2 од дефиниционото множество за кои важи $x_1 < x_2$, може да забележиме дека за поголема вредност на аргументот, одговара поголема вредност на функцијата, $f(x_1) < f(x_2)$. Велеме дека функцијата расте на дефиниционата област, интервалот $(-\infty, +\infty)$.



Нека е дадена функција $f: R \rightarrow R$

Дефиниција. За функцијата $f(x)$ со дефинициона област D_f и интервал (a, b) кој припаѓа на дефиниционата област, велиме дека:

- е (строго) **монотono растечка** на интервалот (a, b) , ако за било кои $x_1, x_2 \in (a, b)$ такви што $x_1 < x_2$, важи $f(x_1) < f(x_2)$,

- е (строго) **монотono опаѓачка** на интервалот (a, b) , ако за било кои $x_1, x_2 \in (a, b)$ такви што $x_1 < x_2$, важи $f(x_1) > f(x_2)$,

Функциите кои се монотono растечки или монотono опаѓачки се викаат монотони функции.

Ако не важи стриктното неравенство тогаш велиме дека функцијата е растечка или опаѓачка.

Пример 1. Да се определи монотоноста на функцијата $f(x) = 1 - x^3$, на целата дефинициона област.

Решение: Дефиницината област на функцијата е $D_f = R$.

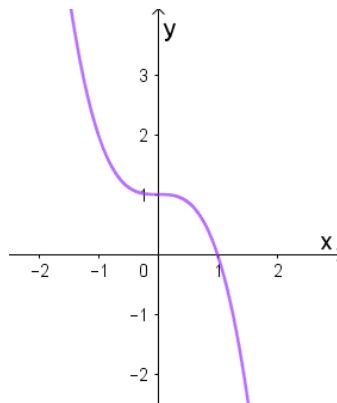
Нека $x_1, x_2 \in D_f$, такви што $x_1 < x_2$, тогаш $x_1^3 < x_2^3$.

Од $x_1^3 < x_2^3$ $/ \cdot (-1)$

$-x_1^3 > -x_2^3$ / додаваме 1 од двете страни на неравенството,

$1 - x_1^3 > 1 - x_2^3$ т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Следува, $f(x)$ е строго монотono опаѓачка на целата дефинициона област.



Задача 5. Испитај ја монотоноста на функциите:

а) $f(x) = 2x - 5$

б) $f(x) = 2 - 4x$

в) $f(x) = \ln x$

г) $f(x) = 1 - x^3$

д) $f(x) = 2x^3 + 1$

ѓ) $f(x) = 1 - \ln x$

Задачи за вежбање:

1. Одреди ја дефиниционата област на функциите:

$$\text{а) } f(x) = x^5 - 4x^3 + 1 \quad \text{б) } f(x) = \frac{3x}{x^2 + 9} \quad \text{в) } f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$$

2. Одреди ја дефиниционата област на функциите:

$$\text{а) } y = \sqrt{2 - 3x} \quad \text{б) } y = \sqrt[3]{2 - 3x}$$

3. Одреди ја дефиниционата област на функцијата

$$\text{а) } g(x) = \log(x^2 - 4) \quad \text{б) } f(x) = \ln(x - 1) + \sqrt{5 - x}$$

4. Одреди ја дефиниционата област на функциите:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \frac{3x + 7}{x^2 - 5x} & \text{б) } f(x) &= \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{в) } f(x) &= \sqrt{x^2 - 3x + 2} \\ \text{г) } f(x) &= \frac{x - 1}{\sqrt{x + 4}} & \text{д) } f(x) &= \log(x + 3) + \log(x - 3) & \text{ѓ) } f(x) &= \log(16 - x^2) \end{aligned}$$

5. Дадена е функцијата $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Одреди ги вредностите: $f(-1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(a)$.

6. Одреди ја функцијата $f(x) = ax + b$, ако $f(2) = -5$ и $f(-1) = 1$

7. Одреди ја функцијата $f(x) = ax^2 + bx + 3$, ако $f(1) = 4$ и $f(-2) = -5$

8. Одреди ги нулите на функцијата

$$\text{а) } f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad \text{б) } f(x) = 3x - 2$$

9. Одреди ги нулите на функцијата

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{x - 2} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^3 + 27}$$

10. Одреди ги нулите на функцијата

$$\text{а) } f(x) = 3^{x^2 - 3} - 3 \quad \text{б) } f(x) = \log(x^2 + 2x) - 3$$

11. Определи ја дефиниционата област и нулите на функциите:

$$\text{а) } f(x) = 8 - 2x - x^2 \quad \text{б) } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 4} \quad \text{в) } f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

г) $f(x) = 5^x - 25$ д) $f(x) = \log(x+2) - 3$

12. Утврди која од следните функции е парна, непарна, а која ниту парна ниту непарна.

а) $f(x) = 2x^7 - x^5 + 3x^3$ б) $f(x) = \frac{3x^2}{4-x^2}$ в) $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$

12. Утврди која од следните функции е парна, непарна, а која ниту парна ниту непарна.

а) $f(x) = 2x^7 - x^5 + 3x^3$ б) $f(x) = \frac{3x^2}{4-x^2}$ в) $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$

13. Испитај ја парноста на функцијата:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ б) $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1}$

в) $f(x) = x^2 - \sin x$ г) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

д) $f(x) = (x-1)^2$ е) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$

14. Испитај ја монотоноста на функциите, на дефиниционите области:

а) $f(x) = 4x + 7$ б) $f(x) = x^3$

в) $f(x) = 1 - x^3$ г) $f(x) = \log(x-3)$ д) $f(x) = \frac{1}{x}$

15. Определи кои од функциите се ограничени, а кои се неограничени:

а) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ б) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

в) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ г) $f(x) = 5 \cos x$

д) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2}$ е) $f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \right)$

16. Одреди ги сложените функции (композиција од функциите) $f \circ g$ и $g \circ f$:

а) $f(x) = x^2 + 1, x \in R$ и $g(x) = 2 - 3x, x \in R$

б) $f(x) = \sin x, x \in R$ и $g(x) = x^2, x \in R$

в) $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ и $g(x) = \frac{1}{x+5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

г) $f(x) = \lg x, x \in [1, +\infty)$ и $g(x) = \sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$.

Забелешка:

Состав (композиција) на функции имате учено во претходните учебни години. Да се потсетиме на дефиницијата.

Дефиниција. Нека функција f е дефинирана на множеството D_f и нека g е функција дефинирана на множеството D_g , така што $V_f = \{f(x) | x \in D_f\} \subseteq D_g$. Тогаш на множеството D_f е дефинирана композиција (сложена функција) од функциите f и g означена со $g \circ f$, со следното правило на придружување $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in D_f$.

17. Одреди ја функцијата f ако $h = g \circ f$:

а) $h(x) = (3x - 7)^5, x \in \mathbb{R}$ и $g(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$

б) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$ и $g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$

в) $h(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$ и $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

2. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Да се потсетиме!

Основни елементарни функции се следните функции:

- Константна функција $y = c$ ($c = \text{const}$)
- Степенска функција $y = x^r$, $r \in \mathbb{R}$
- Експоненцијална функција $y = a^x$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Логаритамска функција $y = \log_a x$, $a \neq 0$
- Тригонометриски функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Дефиниција. Секоја функција што може да се добие од основните елементарни функции со примена на конечен број пати на аритметичките операции (собирање, одземање, множење и делење) и операцијата композиција (состав) се вика **елементарна функција**.

Во продолжение ќе се задржиме на графиците и својствата што важат за некои од елементарните функции.

Линеарна функција

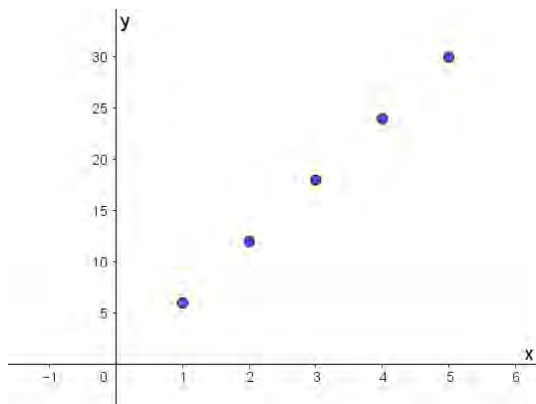
Пример 1. Петре вози секој ден со својот велосипед по 6 *km* до училиште и назад. Да се пресмета колку километри ќе помине Петре за една недела. Да се определи како се менуваат збирот на поминатите километри по денови со помош на функција каде променливата (аргументот) е денот.

Решение: Резултатите може да се запишат во табела

Ден	1	2	3	4	5	1 недела
Поминато <i>km</i>	6	12	18	24	30	30

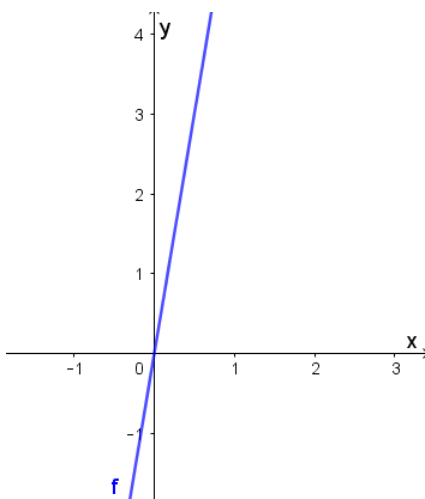
Правилото алгебарски може да го запишеме со формулата $f(x) = 6x$, каде дефиниционата област е $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Функцијата може да ја претставиме графички со точки во координатен систем.



Забелешка: Единицата на x и y -оската не се еднакви, се користи размер $(x\text{-Оска} : y\text{-Оска}) = 1:5$ за подобро претставување на графикот.

Ако запишеме дека дефиниционата област на функцијата $f(x) = 6x$ е $D_f = R$ тогаш функцијата графички претставена е права.



Забелешка: Единиците на x и y -оска се еднакви, користиме размер 1:1.

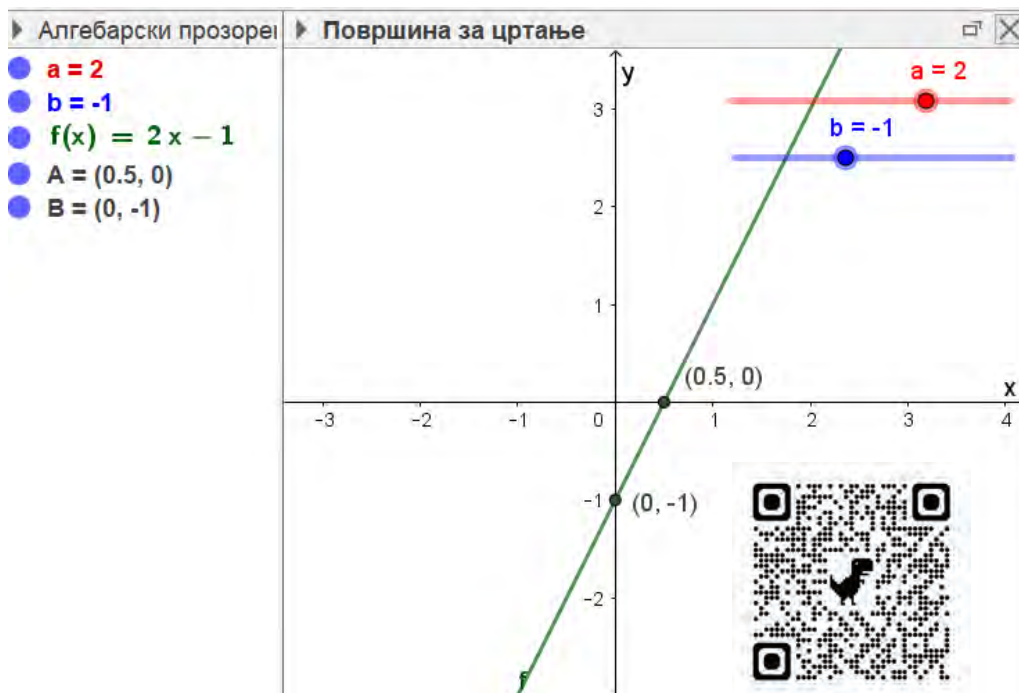
Функцијата $f(x) = ax + b$ се нарекува линеарна функција.

Графикот на линеарната функција е права. За да го скицираме графикот на функцијата потребно е да определиме најмалку две точки кои лежат на правата.

Дефиниционата област е множеството на реални броеви т.е. $D_f = R$

Множеството вредности е множеството на реални броеви т.е. $V_f = R$

Даден е пример на линеарна функција со коефициенти a и b кои во дадениот аплет во геогевра се вредности од лизгачите за a и b . Кои својства ќе важат за линеарната функција?



<https://www.geogebra.org/m/d3uummybd>

За $y = 0$, добиваме $x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Нула на функцијата е $x = -\frac{b}{a}$, т.е. во точката

$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ функцијата ја сече x -оската.

За $x = 0$, добиваме $y = b$. Во точката $(0, b)$ функцијата ја сече y -оската.

Коефициентот на правец на правата е еднаков на тангенсот од аголот што правата го зафаќа со x -оска, т.е. $a = \tan \alpha$ - коефициент на правец.

Ако $a > 0$ функцијата монотонно расте, а ако $a < 0$, тогаш функцијата монотонно опаѓа.

Линеарната функција нема екстреми.

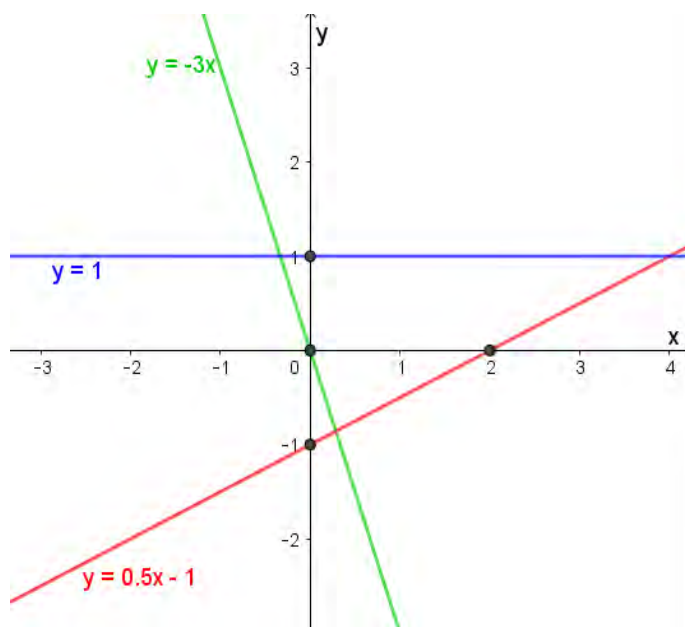
Карактеристични линеарни функции:

- $y = ax$ - минува низ координатниот почеток
- $y = b$ - е паралелна со x -оската (константна функција)

Ако запишеме $x = a$, тогаш графикот е права паралелна со y -оската.

Забелешка: Две прави $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ се паралелни ако $a_1 = a_2$, а се взаемно нормални ако $a_1 \cdot a_2 = -1$

Пример 2. Дадени се графици на линеарните функции $y = -3x$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ и $y = 1$.
Опреди ги карактеристичните вредности и запиши кои својства важат за функциите.



Решение: Да разгледаме само една функција.

За функцијата $y = -3x$, може да ја определиме

дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$ и множество вредности е $V_f = \mathbb{R}$.

Нула на функцијата е 0, т.е. $(0,0)$ е пресечна точка со x – оска, но во исто време е и пресечна точка и со y – оска.

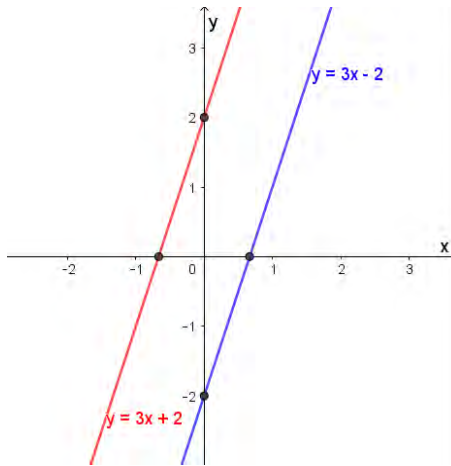
Функцијата е монотонно опаѓачка бидејќи $a = -3 < 0$.

Пример 3. Дадени се графици на функции:

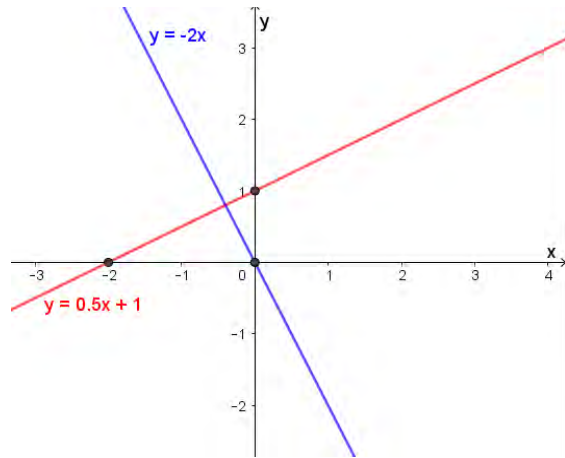
а) $y = 3x + 2$ и $y = 3x - 2$ и б) $y = \frac{1}{2}x + 1$ и $y = -2x$.

Кои прави се паралелни, а кои се взаемно нормални? Провери што важи за нивните коефициенти.

а)



б)



Решение: Правите $y = 3x + 2$ и $y = 3x - 2$ се паралелни и коефициентите на правци се еднакви на 3, т.е. $a_1 = a_2 = 3$.

Правите $y = \frac{1}{2}x + 1$ и $y = -2x$ се взаемно нормални и за производот на коефициентите на правци важи $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$.

Задачи за вежбање:

1. Да се скицира графикот на линеарните функции со определување на најмалку две точки кои припаѓаат на правата:

а) $f(x) = x + 1$, б) $f(x) = -x + 3$, в) $y = \frac{1}{3}x + 2$, г) $y = -1$.

2. Напиши равенка на права која минува низ точката $A(-3, 2)$ и е:

- а) паралелна со x – оската;
- б) паралелна со y – оската;
- в) паралелна со правата $f(x) = x + 3$
- г) нормална на правата $g(x) = 2x - 1$.

Скицирај го графикот на функциите. Можеш да користиш и Геогebra за визуелно претставување.

3. Одреди ги коефициентите a и b во функцијата $f(x) = ax + b$ ако таа минува низ:

- а) точките $A(-1, 2)$ и $B(-2, 5)$;
- б) координатниот почеток и точката $C(4, 2)$.

4. Како гласат равенките на правите што се симетри на:

- а) први и трети квадрант;
- б) втори и четврти квадрант.

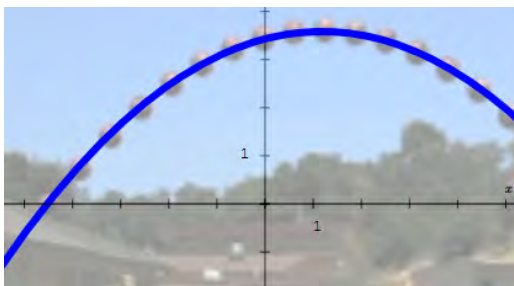
Скицирај го графикот на функциите. Можеш да користиш и Геогebra за визуелно претставување.

3. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Пример 1. Кошаркарот Иво, пред својата кука има кош на кој игра кошарка. На анимацијата, како се движи топката остава трага. Ако се поврзат овие точки со крива, што ќе претставува кривата?



Со побрзување на точките и користење на аплетот во геогебра може да видиме дека патот на топката претставува график на квадратна функција.



Функција $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ се нарекува квадратна функција

Графикот на квадратна функција е **парабола**. За да го скицираме графикот на функцијата потребно е да определиме неколку карактеристични точки.

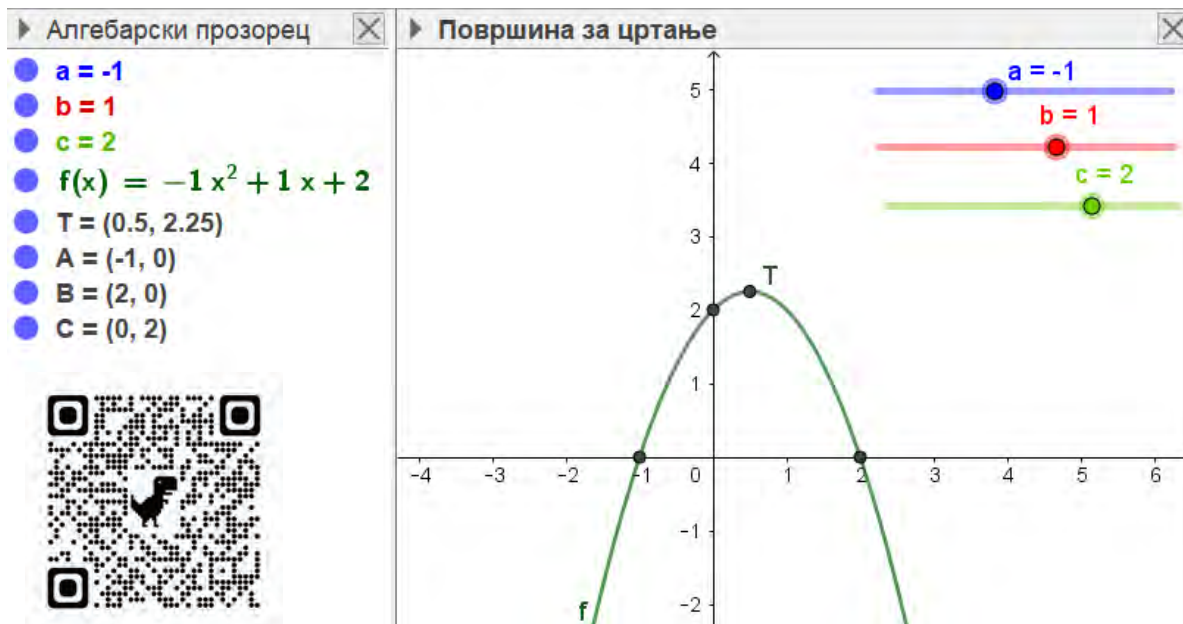
Дефиниционата област е множеството на реални броеви т.е. $D_f = R$

Параболата има теме $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ т.е $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Множеството вредности $V_f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right)$ за $a > 0$, односно $V_f = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$ за $a < 0$.

$x = -\frac{b}{2a}$ е оска на симетрија.

Даден е пример на квадратна функција со коефициенти a , b и c , кои во дадениот аплет во геогebra се вредности од лизгачите за a , b и c . Кои својства ќе важат за квадратната функција?



<https://www.geogebra.org/m/pgcjnhj>

Нули на функцијата се добиваат за $y = 0$, и со решавање на равенката $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, добиваме:

i) Ако $D = b^2 - 4ac > 0$, тогаш функцијата има две нули $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_1 \neq x_2$ т.е. пресечните точки со x – оска се $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$.

ii) Ако $D = b^2 - 4ac = 0$, тогаш функцијата има една нула $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, т.е. пресечна точка (допирна точка) со x – оска е $(x_1, 0)$

iii) Ако $D = b^2 - 4ac < 0$, тогаш функцијата нема нули, решенијата на равенката $x_1, x_2 \notin R$ и функцијата не ја сече x – оска.

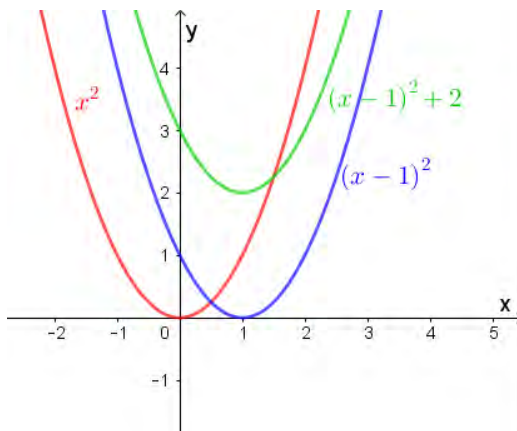
За $x = 0$, добиваме $y = c$. Во точката $(0, c)$ функцијата ја сече y – оската.

Мононост на функцијата:

- Ако $a > 0$, тогаш на интервалот $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ опаѓа, а на интервалот $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ функцијата расте.
- Ако $a < 0$, тогаш на интервалот $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ расте, а на интервалот $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ функцијата опаѓа.

За $a > 0$ функцијата достигнува минимум во темето T , а за $a < 0$ функцијата достигнува максимум во темето T .

Пример 2. Графиците на квадратните функции $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = (x-1)^2 + 2$ се дадени на цртежот

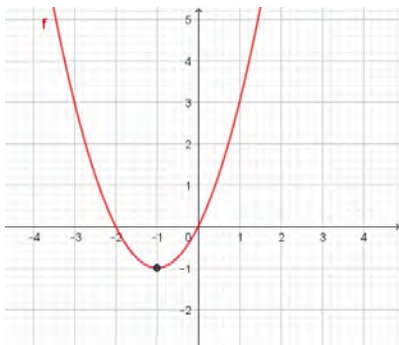


Забелешка:

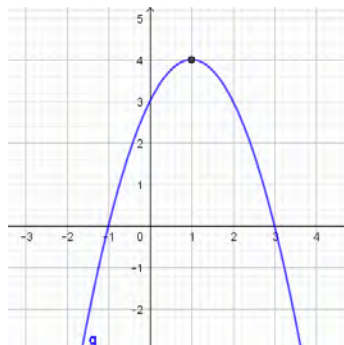
Квадратната функција запишана во обликот $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ се нарекува каноничен вид на квадратна функција, каде $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ и (α, β) се координати на темето T .

Пример 3. Да се определат координатите на темето на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$. Да се определи знакот на параметарот a , интервалите на мононост и пресечните точки со координатните оски.

а)



б)



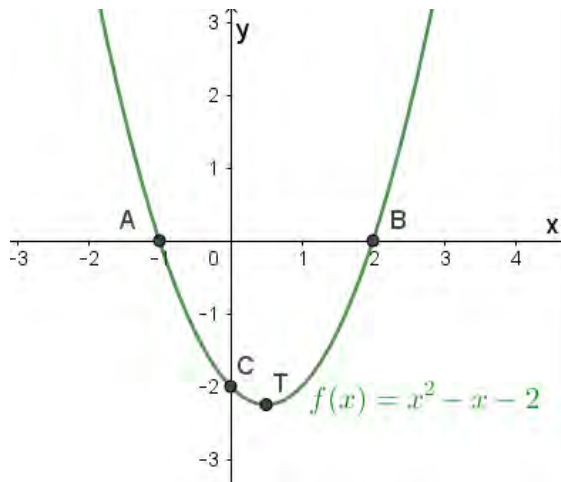
Решение:

а) Темето има координати $(-1, -1)$. Параметарот е $a > 0$. На интервалот $(-\infty, -1)$ функцијата опаѓа, а на интервалот $(-1, +\infty)$ расте. Пресечни точки со x – оската се точките со координати $(-2, 0)$ и $(0, 0)$, и пресекот со y – оската е истата точка $(0, 0)$.

б) Темето има координати $(1, 4)$. Параметарот $a < 0$. На интервалот од $(-\infty, 1)$ функцијата расте, а на интервалот $(1, +\infty)$ опаѓа. Пресечни точки со x – оската се точките со координати $(-1, 0)$ и $(3, 0)$, и пресекот со y – оската е точка $(0, 3)$.

Пример 4. Да се скицира графикот на функцијата $f(x) = x^2 - x - 2$.

Решение:



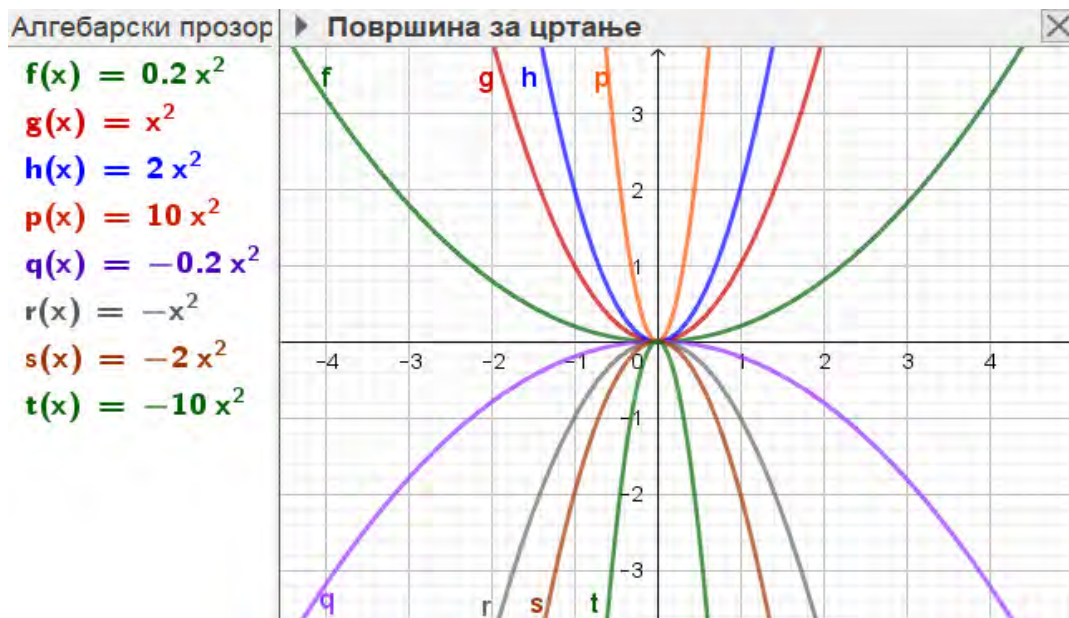
Забелешка:

За да определиме уште некои својства на квадратната функција ќе разгледаме пример на квадратна функција каде коефициентите b и c се нули, т.е. $b = 0$ и $c = 0$. Својствата ќе важат и за квадратна функција со произволни коефициенти.

За квадратната функција $f(x) = ax^2$, наклонот на параболата зависи од апсолутната вредност на квадратниот коефициент.

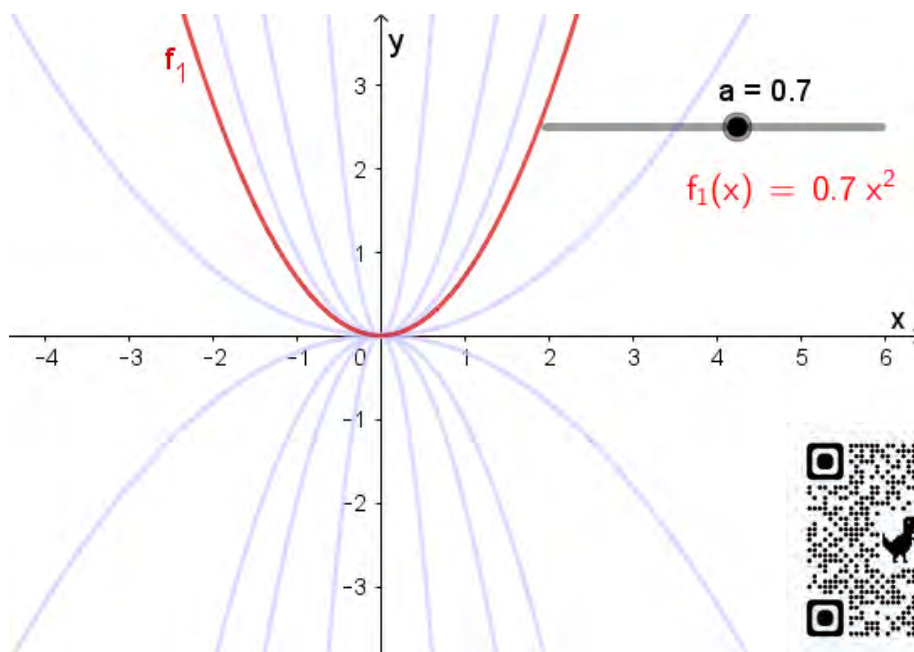
- Колку е поголема апсолутната вредност од квадратниот коефициент, толку побрзо се зголемува наклонот на параболата (т.е. коефициентот на правецот на тангентите во допирна точка од функцијата). „Гранките“ на параболата се поблиску до y – оската.

- Колку е помала апсолутната вредност од квадратниот коефициент, толку побавно се зголемува наклонот на параболата (т.е. коефициентот на правецот на тангентата во допирна точка од функцијата). „Гранките“ на параболата се поблиску до x – оската.



Пример 4. Подреди ги параболите од оние каде што наклонот се менува најбавно, до оние каде што наклонот се менува најбрзо.

$$y = -3x^2, y = 2x^2, y = -\frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{5}x^2.$$



<https://www.geogebra.org/m/zn3xmeuh>

Задачи за вежбање:

1. Да се скицира графикот на функцијата со определување координати на темето, пресечните точки со координатните оски и определување на уште една произволна точка која припаѓа на функцијата.

а) $y = x^2 + 2x$ б) $y = x^2 - 6x + 5$ в) $y = x^2 - 4$

Забелешка: За попрецизно цртање на графикот на квадратна функција поребно е да определиме 5 точки, од кои едната е темето, а другите два пара се симетрични точки во однос на оската на симетрија на параболата.

2. Дадена е функцијата $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

а) Најди ја дефиниционата област на функцијата

б) Најди ги нулите на функцијата

в) Пресметај го максимумот на функцијата и определи ги координатите на темето на параболата

г) Одреди го множеството вредности на функцијата

д) Најди ги интервалите на монотоност на функцијата

ѓ) Скицирај го графикот на функцијата. Можеш да користиш и Геогebra за визуелно преставување на функцијата и сите нејзини точки.

3. Најди квадратна функција $f(x) = ax^2 + c$ ако $f(0) = 1$ и $f(1) = 2$.

4. Најди квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ ако се дадени три точки од нејзиниот график: $A(1, -1)$, $B(0, 1)$ и $C(-1, 5)$.

Скицирај го графикот на добиената функција. Можеш да користиш и Геогebra за визуелно претставување на графикот на функцијата и точките што лежат на истиот.

4. СТЕПЕНСКА ФУНКЦИЈА

4.1 СТЕПЕНСКА ФУНКЦИЈА СО ПРИРОДЕН ЕКСПОНЕНТ

Функцијата $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ се нарекува степенска функција со природен експонент.

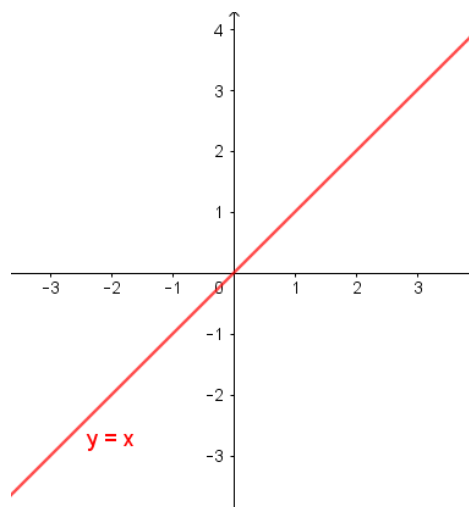
Ќе разгледаме неколку специјални случаи.

1) За $n=1$, се добива функцијата $f(x) = x$. Ова е линеарна функција $f(x) = ax + b$ со $a=1$ и $b=0$.

Графикот е права која минува низ координатниот почеток $(0,0)$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = \mathbb{R}.$$

Функцијата монотонно расте на целата дефинициона област.



2) За $n=2$, се добива функцијата $f(x) = x^2$. Ова е квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ со $a=1$, $b=0$ и $c=0$.

Графикот на функцијата е парабола која има теме $T(0,0)$.

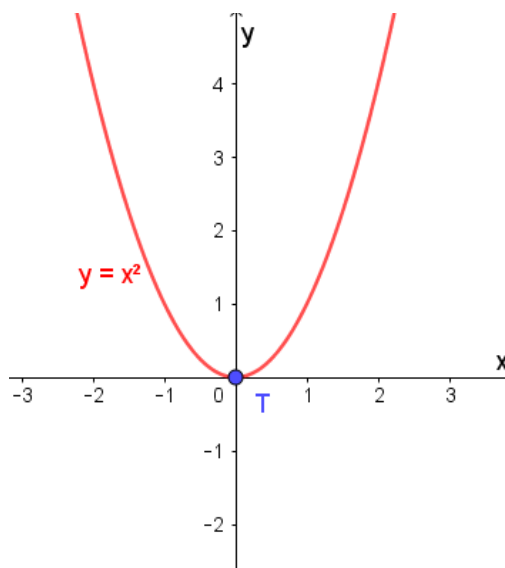
$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = [0, +\infty).$$

Функцијата монотонно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0)$ и монотонно расте на интервалот од $(0, +\infty)$.

Параболата е завртена со отворот нагоре и има минимум во темето $T(0,0)$

т.е. за $x=0$, $y_{\min} = 0$.

y – осата е оска на симетрија.



3) За $n = 3$, се добива функција $f(x) = x^3$. Оваа функција ги има следните особини:

Графикот на функцијата е крива која се нарекува кубна парабола,

$$D_f = R \text{ и } V_f = R.$$

За $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ се добиваат слични криви само со различна стрмина.

Функциите се монотонно растечки на целата дефинициона област.

Пресечна точка со x и y – оските е точката $(0, 0)$.

Графиците на сите функции минуваат низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x^5$$

$$h(x) = x^7$$

$$p(x) = x^9$$

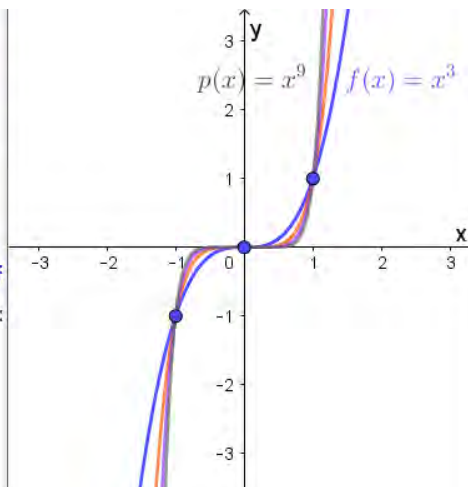
$$A = (0, 0)$$

$$B = (1, 1)$$

$$C = (-1, -1)$$

текст1 = "f"

текст2 = "f"



4) За $n = 4, 6, 8, \dots$ се добиваат функции $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$, $p(x) = x^8 \dots$ за кои важат истите својства како и за квадратната функција $f(x) = x^2$.

$$D_f = R \text{ и } V_f = [0, +\infty).$$

Функциите монотонно опаѓаат на интервалот $(-\infty, 0)$ и монотонно растат на интервалот од $(0, +\infty)$.

Кривите се завртени со отворот нагоре и имаат минимум во темето $(0, 0)$

т.е. за $x = 0$, $y_{\min} = 0$.

y – осата е оска на симетрија.

Сите функции минуваат низ точките $(-1, 1)$ и $(1, 1)$

$$T = (0, 0)$$

$$f: y = x^2$$

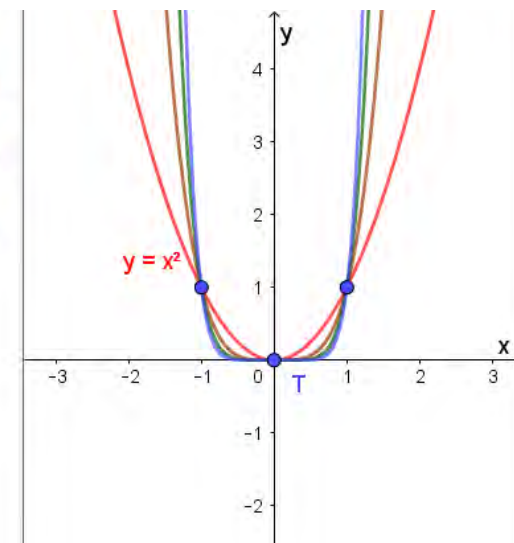
$$g: y = x^4$$

$$h: y = x^6$$

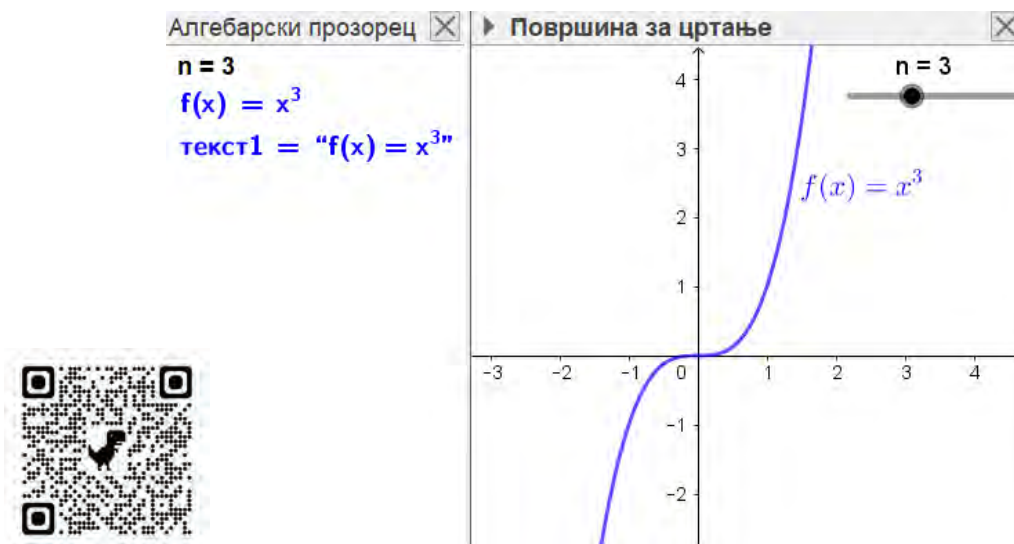
$$p: y = x^8$$

$$A = (1, 1)$$

$$B = (-1, 1)$$



За да се разгледат својствата што важат за степенските функции со експонент природен број може да се користи аплетот на кој ќе се менува вредноста на експонентот n со лизгачот.



<https://www.geogebra.org/m/ekuwfbd8>

Пример 1. Да се скицира графикот на функциите: а) $f(x) = x^4$, б) $g(x) = x^5$ со определување на неколку карактеристични точки.

Решение: а) За функцијата $f(x) = x^4$, определи ги вредностите на функцијата за $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, а потоа скицирај го графикот.

б) За функцијата $g(x) = x^5$ определи ја вредноста на функцијата за $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, а потоа скицирај го графикот.

Користи го претходниот аплет за визулено претставување на функциите во Геогebra.

4.2. СТЕПЕНСКА ФУНКЦИЈА СО ЕКСПОНЕНТ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Ако го прошириме множеството дозволени вредности на n да биде во множеството на рационални броеви и запишеме q за експонент, тогаш добиваме степенска функција $f(x) = x^q$ со рационален експонент $q \in \mathbb{Q}$.

Ќе разгледаме неколку карактеристични степенски функции со експоненти рационален

број $q \in \left\{-1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

1) За $q = -1$ се добива функцијата $f(x) = x^{-1}$, т.е. $f(x) = \frac{1}{x}$. За функцијата важат следните особини:

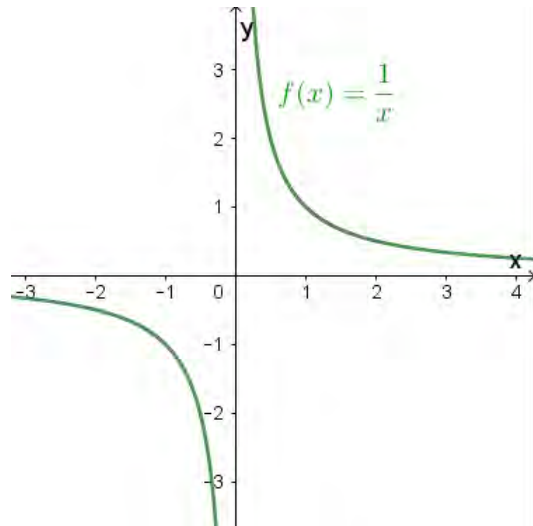
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Функцијата монотono опаѓа на интервалите $(-\infty, 0)$ и од $(0, +\infty)$.

Нема екстремна вредност.

x и y – оските не ги сече.

Функцијата минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.



2) За $q = -2$ се добива функцијата $f(x) = x^{-2}$, т.е. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. За функцијата важат следните особини:

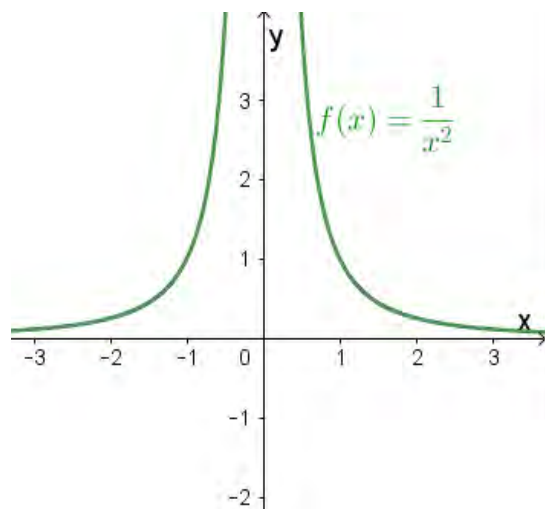
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } V_f = (0, +\infty).$$

Функцијата монотono расте на интервалот $(-\infty, 0)$ и монотono опаѓа на интервалот $(0, +\infty)$.

Функцијата нема екстремна вредност.

Функцијата не ги сече x и y – оските.

Функцијата минува низ точките $(-1, 1)$ и $(1, 1)$.



3) За $q = \frac{1}{2}$ се добива функцијата $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, т.е. $f(x) = \sqrt{x}$.

За функцијата важат следните особини:

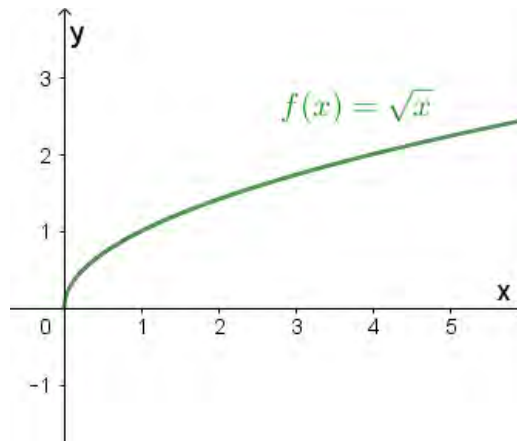
$$D_f = [0, +\infty) \text{ и } V_f = [0, +\infty).$$

Функцијата монотонно расте на целата дефинициона област.

Минимална вредност има во точката $(0, 0)$.

x и y – оските ги сече во точката $(0, 0)$.

Функцијата минува низ точката $(1, 1)$.



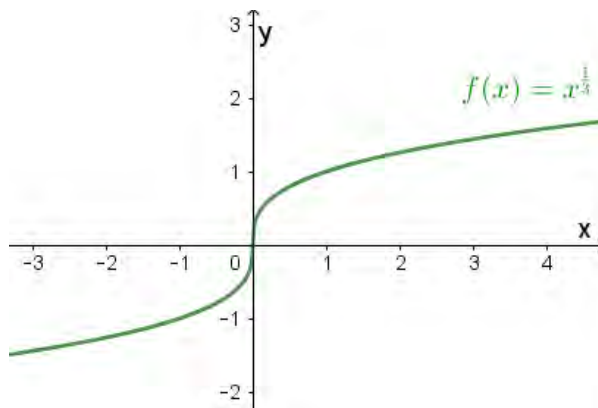
4) За $q = \frac{1}{3}$ се добива функцијата $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, т.е. $f(x) = \sqrt[3]{x}$. За функцијата важат следните особини:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = \mathbb{R}.$$

Функцијата монотонно расте на целата дефинициона област.

x и y – оските ги сече во точката $(0, 0)$.

Функцијата минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.



Да ги разгледаме општите случаи за степенската функција со експонент рационален број. Ќе разгледаме посебно експонентот да биде цел негативен број или рационален

број $q = \frac{a}{b}$, каде a, b се заемно прости броеви и $b \neq \{0, 1\}$.

1) Нека експонентот е q е цел негативен број:

1 а) Ако $q = -2n$, тогаш $f(x) = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$,
за $n \in \mathbb{N}$.

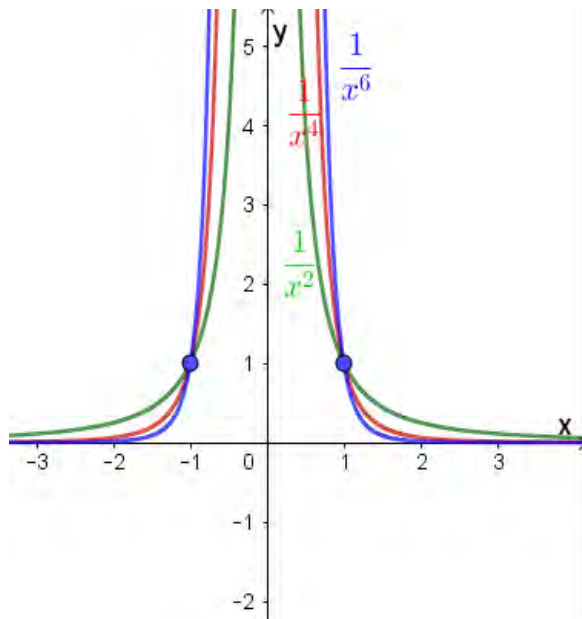
Својстава кои важат за функцијата се:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } V_f = (0, +\infty).$$

Функцијата монотонно расте на интервалот $(-\infty, 0)$ и монотонно опаѓа на интервалот $(0, +\infty)$.

Функцијата нема екстремна вредност, и не ги сече x и y – оските.

Функцијата минува низ точките $(-1, 1)$ и $(1, 1)$.



1 б) Ако $q = -(2n-1)$, тогаш

$$f(x) = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}, \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

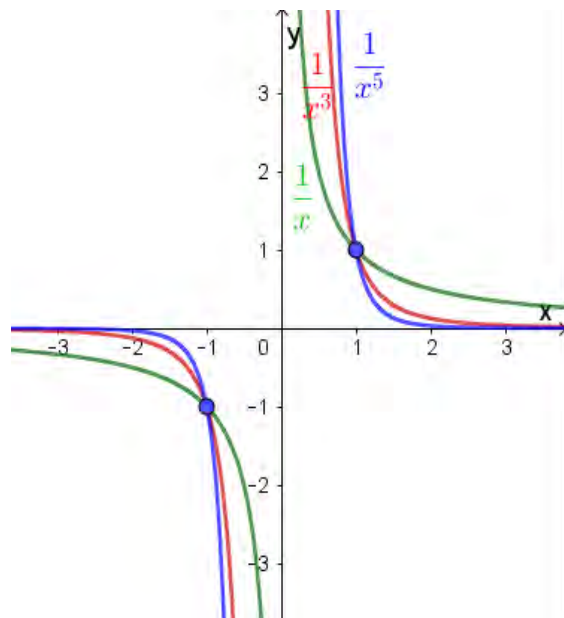
Својстава кои важат за функцијата се:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Функцијата монотонно опаѓа на интервалите $(-\infty, 0)$ и од $(0, +\infty)$.

Функцијата нема екстремна вредност и не ги сече x и y – оските.

Функцијата минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.



2) Нека експонентот q е рационален број $q = \frac{a}{b}$, каде a, b се заемно прости броеви и $b \neq \{0, 1\}$.

Забелешка: Во примерите вредноста на a е непарен позитивен број.

2 а) Ако b е парен број, тогаш

$$f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}.$$

Својства кои важат за функциите се:

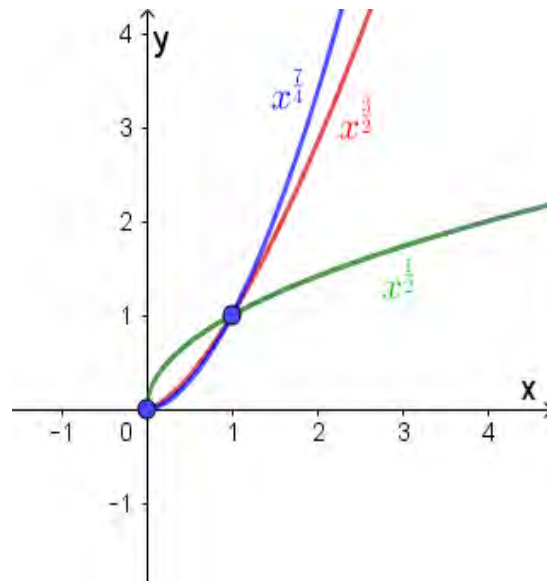
$$D_f = [0, +\infty) \text{ и } V_f = [0, +\infty).$$

Функцијата монотонно расте на целата дефинициона област.

Минимална вредност има во точката $(0, 0)$.

Функцијата ги сече x и y – оските во точката $(0, 0)$.

Функцијата минува низ точката $(1, 1)$.



2 б) Ако b е непарен број, тогаш

$$f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}.$$

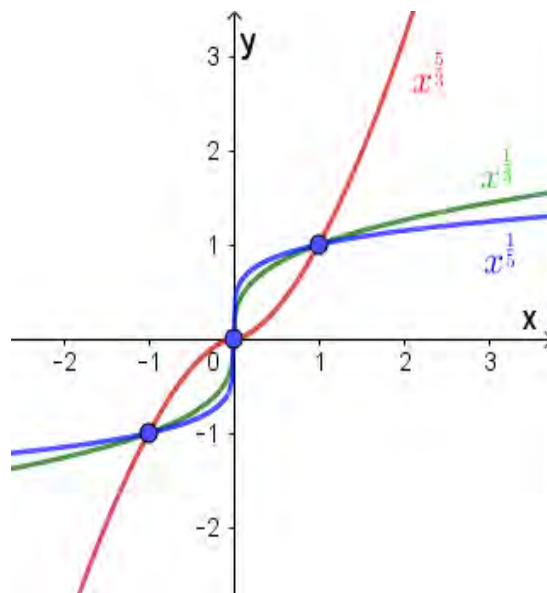
Својства кои важат за функциите се:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = \mathbb{R}.$$

Функцијата монотонно расте на целата дефинициона област.

x и y – оските ги сече во $(0, 0)$.

Функцијата минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.



Задачи за вежбање:

Нацртај го графикот на функциите и запиши ги нивните својствата:

1. а) $y = x^6$ б) $y = x^{-4}$

2. а) $y = \sqrt[3]{x}$ б) $y = \sqrt[4]{x}$

3. Дадена е функцијата $y = x^{\frac{1}{6}}$.

а) Најди ја дефиниционата област на функцијата

б) Дали функцијата има нули?

в) Одреди го множеството вредности на функцијата

г) Дали функцијата е ограничена

д) Нацртај го графикот на функцијата.

4. Дадена е функцијата $y = x^{-3}$.

а) Најди ја дефиниционата област на функцијата

б) Дали функцијата има нули?

в) Одреди го множеството вредности на функцијата

г) Дали функцијата е ограничена?

д) Нацртај го графикот на функцијата. Можеш да користиш и Геогebra за визуелно претставување на функцијата

5. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

Функцијата $f(x) = a^x$, за $a \neq 1, a > 0$ се нарекува експоненцијална функција. Функцијата ги има следните особини:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = (0, +\infty).$$

$(0,1)$ е пресечна точка со y -оската.

Нема минимум и нема максимум.

За $a > 0$, функцијата монотонно расте на целата дефинициона област, а за $0 < a < 1$ функцијата монотонно опаѓа на целата дефинициона област.

Функцијата е ограничена од долу, т.е. $f(x) > 0$.

Функцијата нема нули.

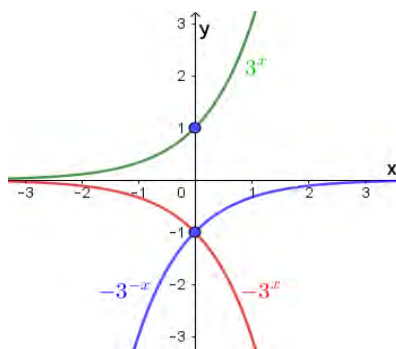
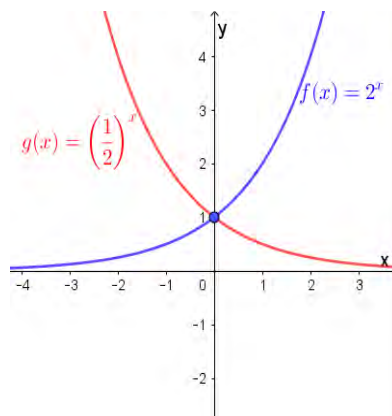
Пример 1. Да се скицира графикот на функциите:

а) $y = 3^x, y = -3^x, y = -3^{-x}$ б) $y = 2^x, y = 2^x - 1, y = 2^{x+2} - 1$

Решение:

Графиците на експоненцијалните функции $y = 3^x, y = -3^x, y = -3^{-x}$ се дадени на цртежот.

Кои својства важат за функциите?

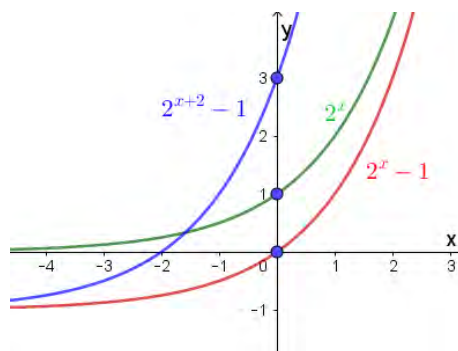


Графиците на експоненцијалните функции

$$y = 2^x, y = 2^x - 1, y = 2^{x+2} - 1$$

се зададени на цртежот.

Кои својства важат за функциите?



Задачи за вежбање:

Нацртај го графикот на функциите:

1. а) $y = 4^x$ б) $y = 3^x$

2. а) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ б) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

3. Дадена е функцијата $y = a^x$.

а) Кои вредности може да ги има основата a ?

б) Најди го доменот и кодоменот на функцијата.

в) Дали функцијата е ограничена?

г) Одреди ја монотоноста на функцијата во зависност од a .

д) Дали функцијата има нули?

4. Најди ја функцијата $f(x) = a^x$ ако минува низ точката $A(1, 2)$. Скицирај го графикот на функцијата. Можеш да користиш Геогebra за визуелно претставување на функцијата и точката низ која што минува функцијата.

6. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

Функцијата $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ се нарекува логаритамска функција.

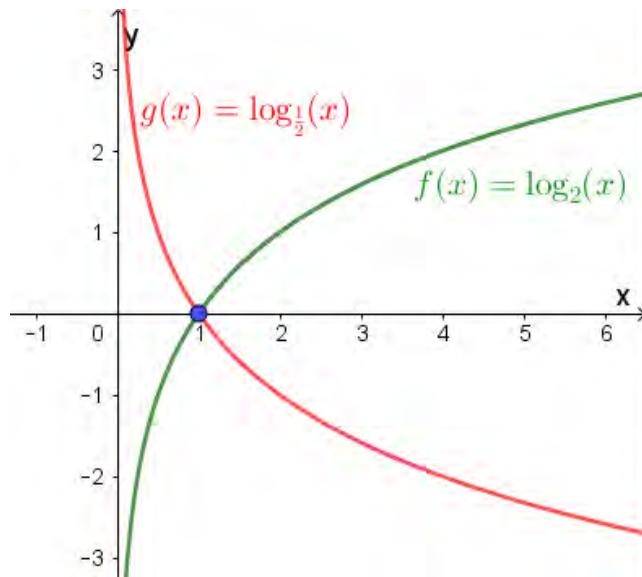
Функцијата ги има следните особини:

$$D_f = (0, +\infty) \text{ и } V_f = \mathbb{R}.$$

Функцијата нема максимум и минимум.

$x = 1$ е нула на функцијата, т.е. пресечна точка со x -оската е точката $(1, 0)$.

За $a > 1$, функцијата монотонно расте на целата дефинициона област, а за $0 < a < 1$ монотонно опаѓа на целата дефинициона област.



Пример 1. Да се скицираат графичите на функциите:

а) $y = \log_2 x$, $x > 0$ б) $y = \log_2 \frac{1}{x}$, $x > 0$ в) $y = \log_2(-x)$, $x < 0$

Решение:

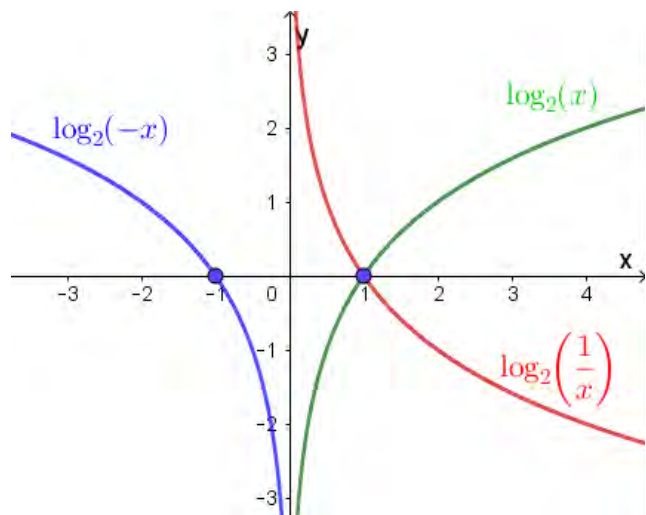
Графичите на логаритамските функции

$$y = \log_2 x, x > 0,$$

$$y = \log_2 \frac{1}{x}, x > 0, \text{ и } y = \log_2(-x), x < 0$$

се дадени на цртежот.

Кои својства важат за функциите?



Задачи за вежбање:

Нацртај го графикот на функциите:

1. а) $y = \log_3 x$

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2. а) $y = -2 + \log_2 x$

б) $y = \log_2 (x-1)$

3. Дадена е функцијата $y = \log_a x$.

а) Кои вредности може да ги има основата a ?

б) Најди го доменот и кодоменот на функцијата.

в) Дали функцијата е ограничена?

г) Одреди ја монотоноста на функцијата во зависност од a .

д) Дали функцијата има нули?

4. Најди ја функцијата $f(x) = \log_a x$ ако минува низ точката $A(4, 2)$. Скицирај го графикот на функцијата. Можеш да користиш Геогебра за визуелно претставување на функцијата и точката низ која што минува функцијата.

7. ПОИМ ЗА ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

На ист координатен систем да ги претставиме графици на функциите $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$.

Што може да се воочи функциите?

За експоненцијалната функција

$y = 2^x$, дефиниционата област

$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = (0, +\infty).$$

За логаритамската функција

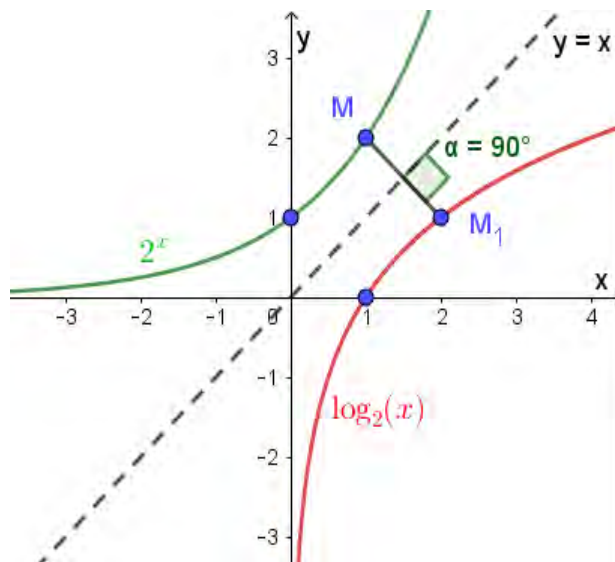
$y = \log_2 x$, дефиниционата област

$$D_f = (0, +\infty) \text{ и } V_f = \mathbb{R}.$$

Графиците на двете функции имаат ист облик и се симетрични во однос на правата $y = x$, симетралата на првиот и третиот квадрант.

Ако точката $M(a, b)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = 2^x$, тогаш точката $M_1(b, a)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = \log_2 x$.

Функциите $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ се инверзни една на друга.



Ако е дадена функцијата f со дефинициона област D_f и множество вредности V_f се поставува прашање дали постои и како да се определи функција g со дефинициона област $D_g = V_f$ и множество вредности $V_g = D_f$, така што има обратно дејство, т.е. $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ за секој $x \in D_f$ и $y \in V_f$.

Функцијата g што ги задоволува претходните барања се нарекува инверзна функција на функцијата f .

Дефиниција. Нека функцијата $f: X \rightarrow Y$ е таква што секој елемент од Y е слика на точно еден елемент од X , т.е. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Тогаш функцијата $f^{-1}: Y \rightarrow X$ дефинирана со $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ се нарекува **инверзна функција** на функцијата $f(x)$.

Дефиниционата област на инверзната функција $f^{-1}(x)$ е еднаква на множеството вредност на функцијата $f(x)$, т.е. $D_{f^{-1}} = V_f$.

Забелешка: Записот f^{-1} не значи $\frac{1}{f}$.

Пример 1. Да се определи инверзна функција на функцијата $f(x) = \frac{x}{2x+1}$.

Решение: Нека замениме $f(x)$ со y . Добиваме $y = \frac{x}{2x+1}$.

Да го изразиме x , прво множиме со $2x+1$ и добиваме

$$y(2x+1) = x$$

$$2xy + y = x$$

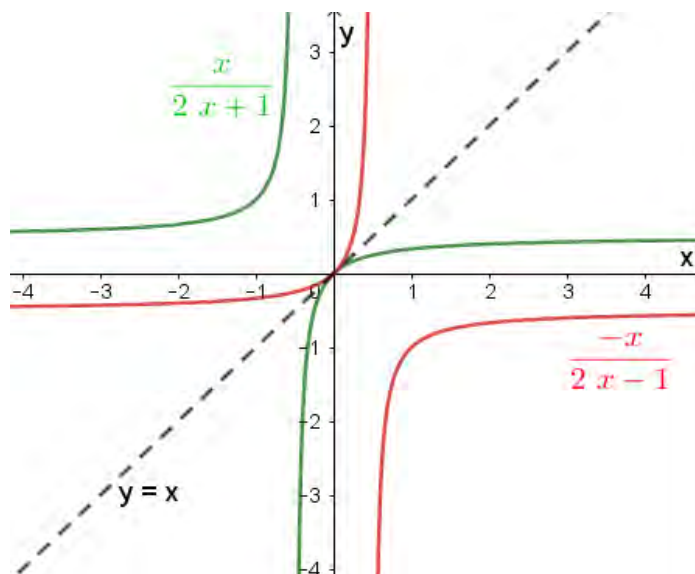
$$2xy - x = -y$$

$$x(2y-1) = -y$$

$$x = -\frac{y}{2y-1}$$

Значи, инверзната функција е $f^{-1}(x) = -\frac{x}{2x-1}$.

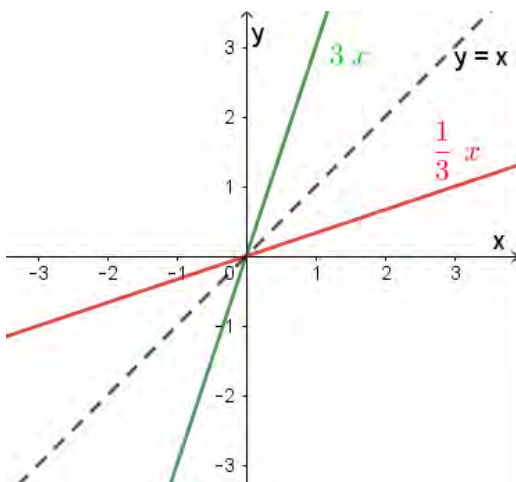
Забелешка: Графиците на функцијата и нејзината инверзна функција се симетрични во однос на правата $y = x$.



Пример 2. Примери на инверзни функции и нивните графици

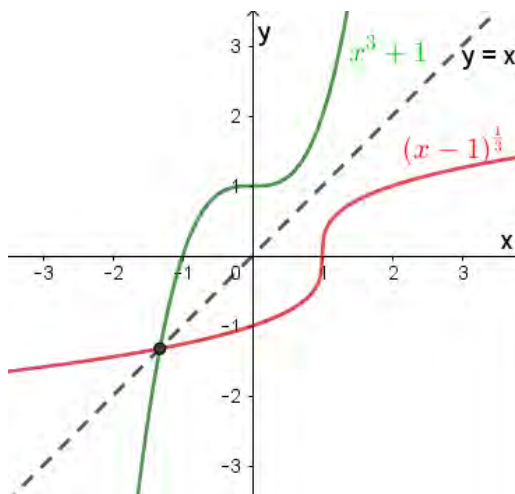
а) $y = 3x$ и $y = \frac{1}{3}x$

Кои својства важат за функциите?



б) $y = x^3 + 1$ и $y = \sqrt[3]{x-1}$

Кои својства важат за функциите?



Задачи за вежбање:

Најди инверзна функција на функциите:

1. а) $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$ б) $y = \frac{2x+1}{x-2}$

2. а) $y = \sqrt[3]{x} + 1$ б) $y = 10^{x-2} + 3$

3. Докажи дека функциите се инверзни сами на себе.

а) $y = \frac{1}{x}$ б) $y = \frac{1-x}{1+x}$

4. За кои вредности на a и b линеарната функција $y = ax + b$, ($a \neq 0$), ќе биде инверзна сама на себе? Во Геогебра конструирај линеарна функција со вредности на параметри кои се добиваат од лизгачи. Визуелно пратстави го решението.

5. Определи ги инверзните функции f^{-1} на функциите:

а) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

б) $f(x) = \sqrt{x+1}$

в) $f(x) = 2^x - 1$

г) $f(x) = 1 + \ln(x+2)$

д) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$

8. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Прво да се потсетиме на едно својство што важи за функциите.

Дефиниција. За функцијата $f(x)$, дефинирана на множеството D_f велиме дека е **периодична** ако постои реален број $T \neq 0$ таков што важи:

1) За секој $x \in D_f$ и $x \pm T \in D_f$,

2) $f(x+T) = f(x)$

Бројот T што ги задоволува условите го викаме **период** на функцијата.

Дефиниција. Нека функцијата $f(x)$, дефинирана на множеството D_f е периодична. Најмалиот позитивен број T за кој важи $f(x+T) = f(x)$ за секој $x \in D_f$, се нарекува **основен период** на функцијата $f(x)$.

Функциите: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ се нарекуваат тригонометриски функции. Да ги претставиме нивните графици и запишеме основните својства.

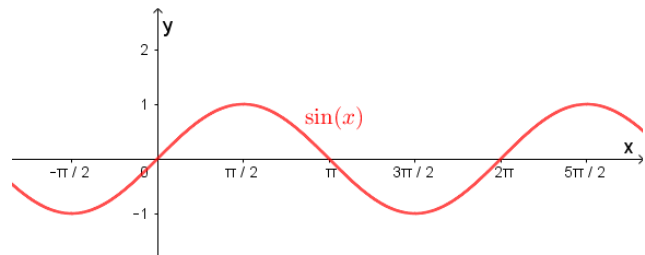
1) $f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$ и $V_f = [-1, 1]$

Функцијата е ограничена.

Функцијата е периодична со

основен период $T = 2\pi$.



Броевите $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се нули на функцијата, т.е. графикот на функцијата ја сече x -оската во точките $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функцијата монотонно расте од -1 до 1 на секој интервал $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$,

$k \in \mathbb{Z}$, а монотонно опаѓа од 1 до -1 на секој интервал $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

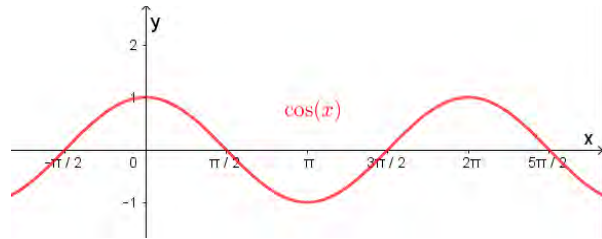
Графикот на функцијата се нарекува **синусоида**.

2) $f(x) = \cos x$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ и } V_f = [-1, 1]$$

Функцијата е ограничена.

Функцијата е периодична со основен период $T = 2\pi$.



Броевите $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се нули на функцијата, т.е. графикот на

функцијата ја сече x -оската во точките $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функцијата монотонно расте на интервалот $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, а монотонно опаѓа на интервалот $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

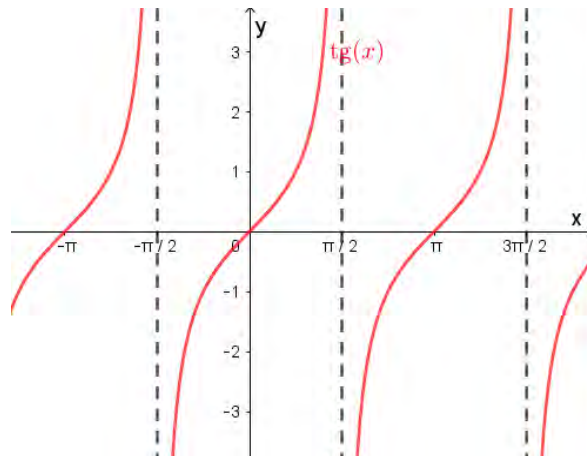
Графикот на функцијата се нарекува **косинусоида**.

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ и } V_f = \mathbb{R}$$

Функцијата е неограничена.

Функцијата е периодична со основен период $T = \pi$.



Броевите $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се нули на функцијата, т.е. графикот на функцијата ја сече x -оската во точките $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функцијата монотонно расте од $-\infty$ до $+\infty$ на секој интервал $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Графикот на функцијата се нарекува **тангенсоида**.

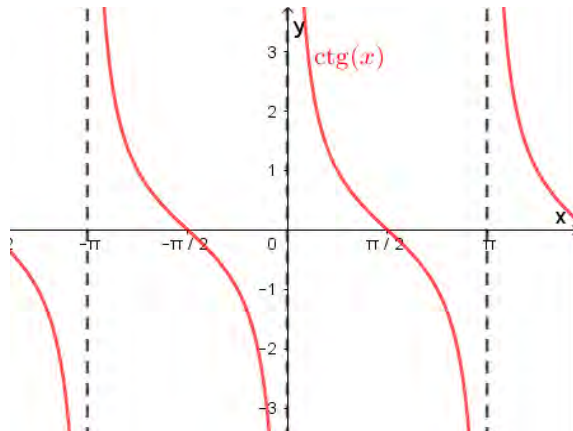
4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ и}$$

$$V_f = \mathbb{R}$$

Функцијата е неограничена.

Функцијата е периодична
со основен период $T = \pi$.



Броевите $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се нули на функцијата, т.е. графикот на

функцијата ја сече x -оската во точките $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функцијата монотono опаѓа од $+\infty$ до $-\infty$ на секој интервал $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Графикот на функцијата се нарекува **котангенсоида**.

Задачи за вежбање:

1. Нацртај го графикот на функциите:

а) $y = 2 \sin x$ б) $y = \cos x + 2$

2. Провери дали се периодични функциите:

а) $y = 1 + \sin x$ б) $y = \cos x - 2$ в) $y = -\operatorname{tg} x - 3$

3. Кои од следните функции се парни, кои се непарни, а кои се ниту парни ниту непарни:

а) $y = 3x^2 + \cos x$ б) $y = 2 \sin x - 3x$ в) $y = \sin x + 2 \cos x$

4.

а) За која функција велиме дека е периодична?

б) За кој период велиме дека е основен период?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА:

1. Одреди го дефиниционото множество на функциите:

а) $f(x) = x^5 - 3x + 7$ б) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+3x-4}$ в) $y = 5\lg(4-x^2)$

2. Одреди ги нулите на функциите:

а) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+x+1}$ б) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ в) $f(x) = \log(2x+1)$

3. Најди функција од облик $f(x) = ax + b$, ако $f(0) = -2$ и $f(1) = 0$.

4. Испитај ја парноста на функциите:

а) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ б) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$ в) $f(x) = x^2 - \cos x$

5. Одреди инверзна функција на функциите:

а) $y = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x$ б) $y = \frac{x+5}{2x-1}$

в) $y = \sqrt[3]{x} - 2$ г) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

6. Функцијата f е зададена со формулата $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

а) Одреди $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$

б) Одреди ги пресечните точки со x и y оска,

в) Нацртај го графикот на функцијата и прикажи ги добиените точки од а) и б),

г) Каде функцијата расте? А каде опаѓа?

д) Кои се вредностите на функцијата f кога x е помало од -1 ?

ѓ) За која вредност на x функцијата има вредност 1 ?

е) За која вредност на x функцијата постигнува вредности помали од -1 ?

7. Функцијата f е зададена со формулата $f(x) = -2x + 1$.

а) Одреди $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$

б) Одреди ги пресечните точки со x и y оска,

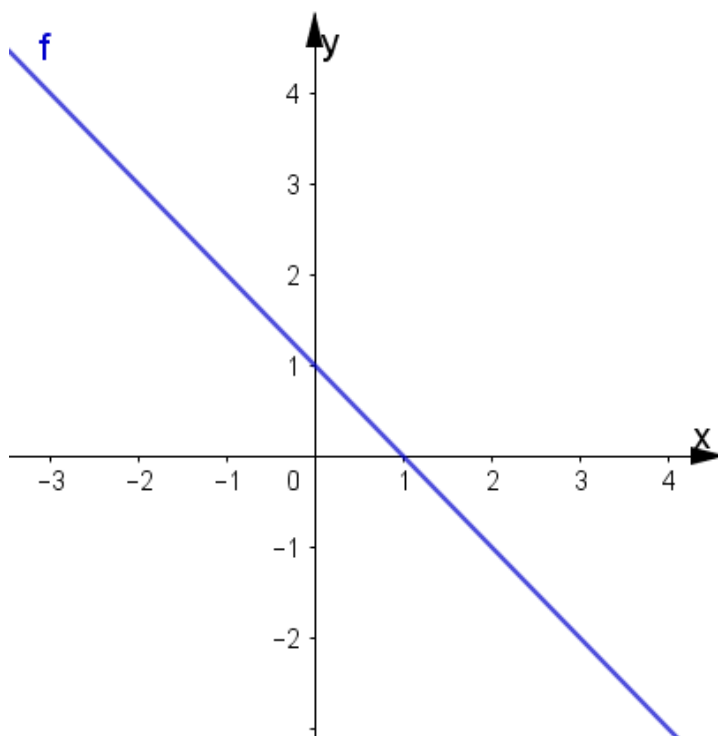
в) Нацртај го графикот на функцијата и прикажи ги добиените точки од а) и б),

г) Каде функцијата расте? А каде опаѓа?

д) Кои се вредностите на функцијата f кога x е поголемо од 3?

ѓ) За која вредност на x функцијата постигнува вредности помали од -5?

8. Функцијата е зададена со графикот



а) Дали функцијата f во некоја точка x има најголема вредност? А дали има најмала вредност?

б) Каде функцијата расте? А каде опаѓа?

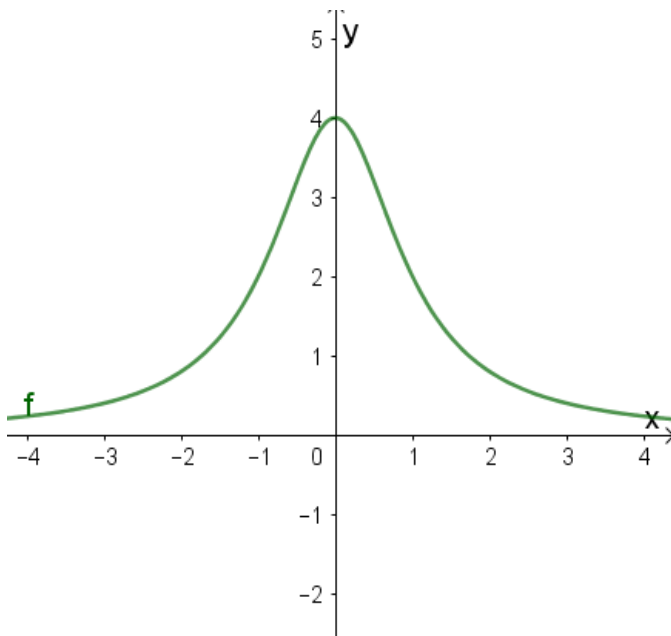
в) Која е вредноста на функцијата за $x=2$? А која за $x=-1$?

г) Кои се вредностите на функцијата f кога x е помало од -2?

д) За која вредност на x функцијата има вредност -1?

ѓ) За која вредност на x функцијата постигнува вредност помеѓу 1 и 5?

9. Функцијата е зададена со графикот



а) Дали функцијата f во некоја точка x има најголема вредност? А дали има најмала вредност?

б) Каде функцијата расте? А каде опаѓа?

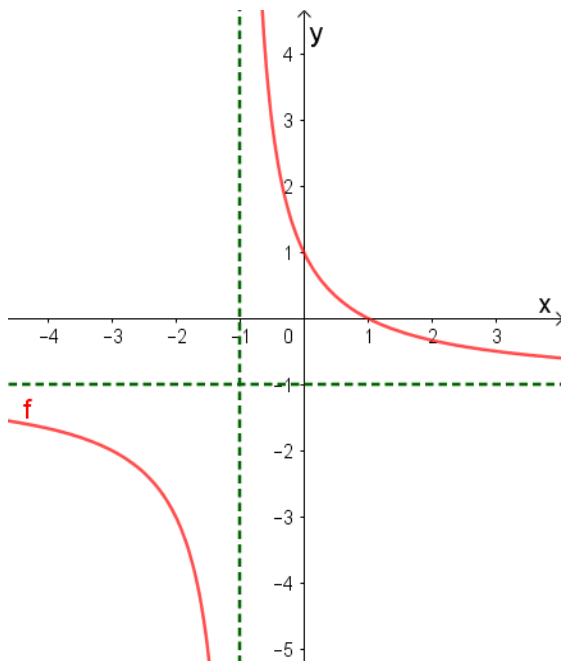
в) Која е вредноста на функцијата за $x=2$? А која за $x=0$?

г) Кои се вредностите на функцијата f кога x е помало од -1 ?

д) За која вредност на x функцијата има вредност -1 ?

ѓ) За која вредност на x функцијата постигнува вредноста помеѓу 0 и 2 ?

10. Функцијата е зададена со графикот



а) Дали функцијата f во некоја точка x има најголема вредност? А дали има најмала вредност?

б) Каде функцијата расте? А каде опаѓа?

в) Која е вредноста на функцијата за $x=1$? А која за $x=0$?

г) Кои се вредностите на функцијата f кога x е помало од -1 ?

д) За која вредност на x функцијата има вредност 1 ?

ѓ) За која вредност на x функцијата постигнува вредноста помали од -1 ?

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 3

ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Во оваа модуларна единица ќе научиш за:

Гранична вредност на функција

Непрекинатост на функција во точка

Асимптоти на графикот на функција

Граници на елементарни функции

Асимптоти на график на елементарни реални функции

Специјални гранични вредности

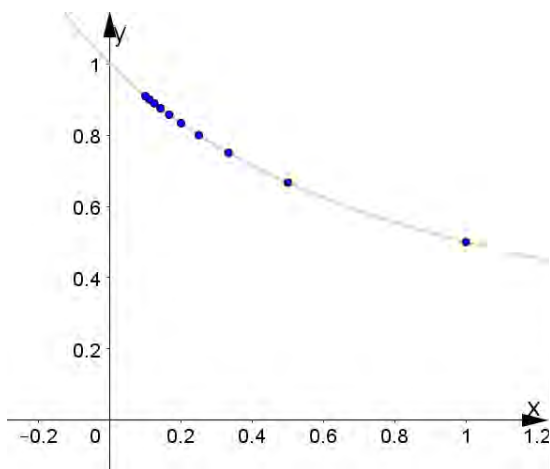
ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА**1. ПОИМ ЗА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА***Граница на функција*

Дадена е функцијата $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Нека аргументот x се доближува кон 0, преку низата зададена со општ член $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Составуваме таблица со вредности на низата (x_n) и вредности на функцијата $y_n = f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, за $n \in \mathbb{N}$.

x_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	...
$f(x_n)$	0,5	0,667	0,75	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	0,909	...

Од оваа таблица, се забележува дека низата (x_n) конвергира кон 0, а соодветната низа од вредностите на функцијата $(f(x_n))$ конвергира кон 1 (види цртеж).



Ако ја определиме вредноста на апсолутната вредност од разликата $|f(x_n) - 1|$, добиваме:

$f(x_n)$	0,5	0,667	0,75	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	0,909	...
$ f(x_n) - 1 $	0,5	0,333	0,25	0,2	0,167	0,143	0,125	0,111	0,1	0,091	...

Може да забележиме дека вредностите на разликата $|f(x_n) - 1|$ се стремат кон 0, кога вредностите на низата (x_n) се стремат (тежат) кон 0.

Ова може да го утврдиме и ако земеме друга низа (x_n) која конвергира кон 0, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, тогаш соодветната низа од вредностите на функцијата се стреми кон 1, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n + 1} = 1.$$

Ќе велиме дека 1 е **гранична вредност на функцијата во точката** $x = 0$, и ќе запишуваме $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. (Се чита: лимес на функцијата $f(x)$ кога x тежи кон 0 е 1)

Дефиниција 1: Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервал (a, b) кој го содржи x_0 , евентуално во x_0 . Ако за секоја низа реални броеви (x_n) (за секој $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (a, b)$) која конвергира кон x_0 , ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), соодветната низа $(f(x_n))$ од вредностите на функцијата е конвергентна низа која конвергира кон реалниот број A , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, тогаш велиме дека **границата на функцијата** $f(x)$ кога x се стреми кон x_0 е бројот A . Функцијата може да не е дефинирана во точката x_0 .

Запишуваме $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

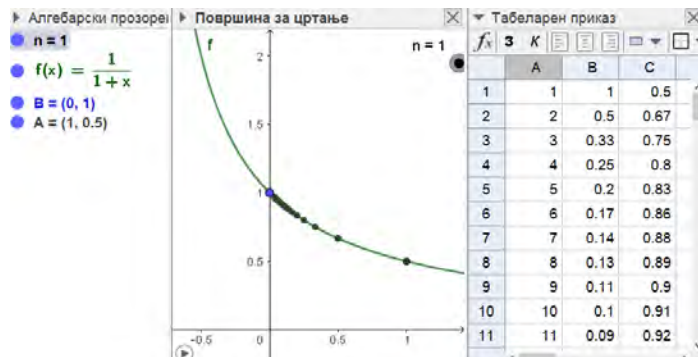
За реалниот број A велиме дека е **гранична вредност** или **граница (лимес)** на функцијата $f(x)$ во точката x_0 .

Поимот гранична вредност на функција може да се воведе и со следната дефиниција.

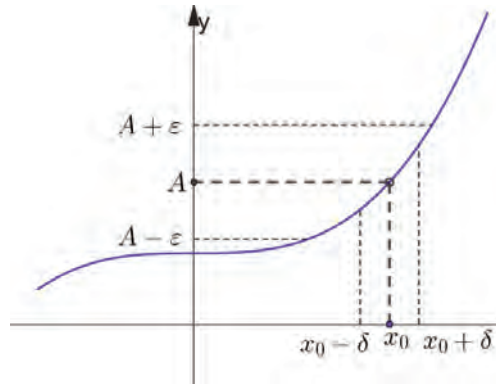
Дефиниција 2: За функцијата $f(x)$ велиме дека има гранична вредност (или лимес) A , кога x тежи кон x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$) ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, таков што за секој $x \in D_f$ што го задоволува условот $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е точно $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ т.е. $|x - x_0| < \delta$, следува $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Двете дефиниции за гранична вредност на функција се еквивалентни. Доказот на ова тврдење нема да го изведеме. Геометриската интерпретација на дефиницијата 1 и дефиницијата 2 се прикажани на сликите и аплетите.

Дефиниција 1:



Дефиниција 2:



Нека функцијата $y = f(x)$ е определена на множеството $D_f \subseteq \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка во која функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во некоја околина на x_0 , освен во самата точка.

Проблемот на наоѓање гранична вредност на функцијата во точка x или нејзина околина е во суштина определување на однесувањето на вредноста на функцијата во околната на точката $f(x)$.

Пример 1. Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Дефинициона област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Да го испитаме однесувањето на функцијата кога аргументот се стреми кон $x_0 = 2 \in D_f$, т.е. да ја определиме граничната вредност на функцијата.

Решение: Нека (x_n) е произволна низа од реални броеви, таква што $x_n \neq -1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Да ја формираме соодветната низа од вредности на функцијата $(f(x_n))$, каде $f(x_n) = \frac{x_n-1}{x_n+1}$. Користејќи ги операциите со гранична вредност на низа, добиваме,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{x_n+1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Следува, за произволна низа (x_n) од реални броеви, таква што $x_n \neq -1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ и соодветната низа од вредности на функцијата $(f(x_n))$ е конвергентна, со гранична вредност $\frac{1}{3}$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{3}$.

Запишуваме $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$ и читаме $\frac{1}{3}$ е гранична вредност на функцијата $f(x)$, кога x се стреми (тежи) кон 2.

Пример 2. Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Дефинициона област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Да го испитаме однесувањето на функцијата кога аргументот се стреми кон $x_0 = 1 \notin D_f$, т.е. да ја определеме граничната вредност на функцијата.

Решение: Нека (x_n) е произволна низа од реални броеви, таква што $x_n \neq \pm 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Да ја формираме соодветната низа од вредности на функцијата $(f(x_n))$, каде $f(x_n) = \frac{x_n-1}{x_n^2-1}$. Користејќи ги операциите со гранична вредност на низа, добиваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{x_n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{(x_n-1)(x_n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Запишуваме $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Забелешка: Во примерот, иако функцијата не е определена во точката $x_0 = 1$, граничната вредност на функцијата во околината $x_0 = 1$ постои и е еднаква на $\frac{1}{2}$.

Граница на функција кога аргументот се стреми кон бесконечност.

Дефиниција 3: Ако за секоја конвергентна низа (x_n) , таква што за секој $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, соодветната низа $(f(x_n))$ од вредностите на функцијата $f(x)$ е конвергентна со граница A , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, тогаш велиме дека $f(x)$ има граница A кога x се стреми кон ∞ и пишуваме $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Пример 3. Да се пресмета граничната вредност $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

Решение: Дефиниционата област на функцијата $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Нека (x_n) е низа од реални броеви таква што $x_n \neq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$, па од особините на низите добиваме:

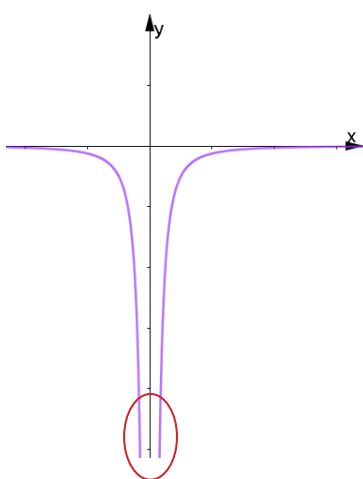
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n+1}{x_n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \left(2 + \frac{1}{x_n} \right)}{x_n \left(1 - \frac{1}{x_n} \right)} = \frac{2+0}{1-0} = 2, \text{ од каде што согласно со дефиницијата може да}$$

запишеме $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$.

Имајќи ги во предвид претходните дефиниции, може графички да ги претставиме следните гранични вредности.

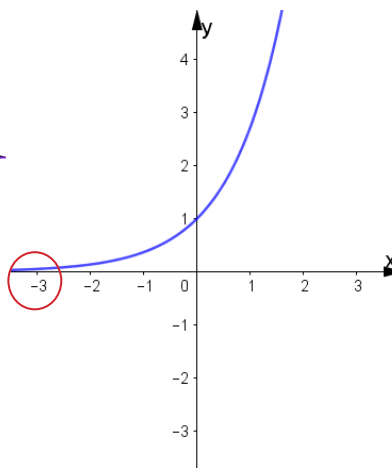
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$(x_0 = 0)$$

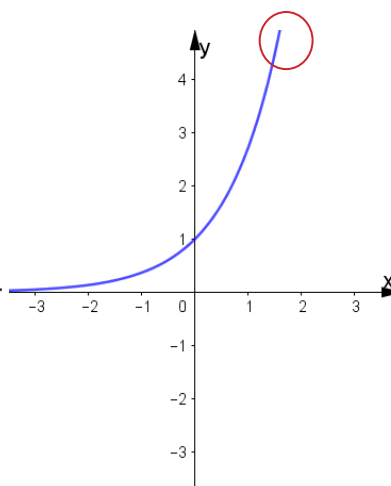


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

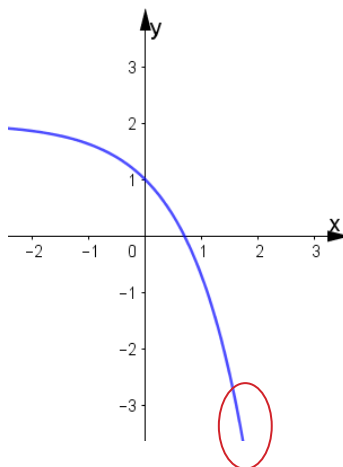
$$(A = 0)$$



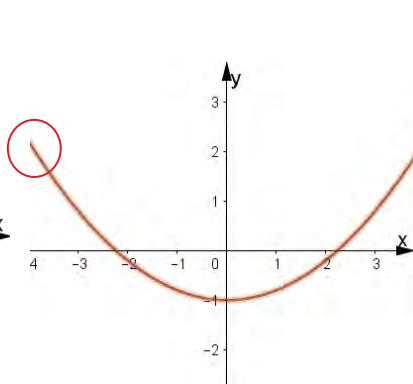
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



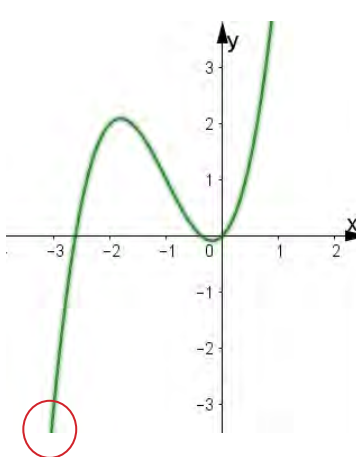
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



Лева и десна гранична вредност.

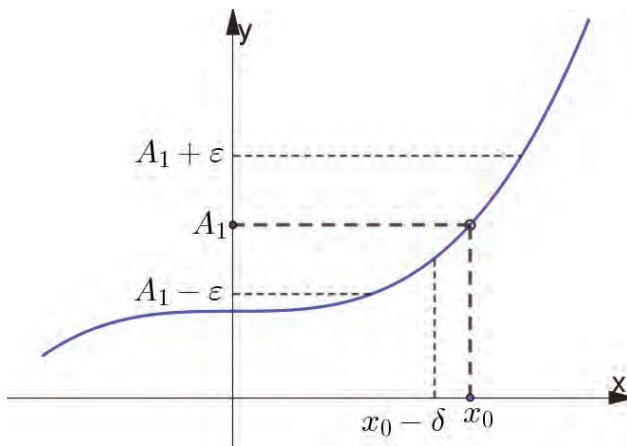
Често пати има потреба да го утврдиме однесувањето на функцијата кога аргументот x се приближува кон x_0 само од лево или само од десно. На тој начин доаѓаме до поим лева и десна граница на функција во точка x_0 .

Дефиниција 4: Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервал (a, x_0) освен евентуално за самиот број x_0 . Ако за секоја низа реални броеви (x_n) (за секој $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (a, x_0)$) која конвергира кон x_0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), соодветната низа $(f(x_n))$ од вредностите на функцијата е конвергентна низа која конвергира кон реалниот број A_1 ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_1$), тогаш велиме дека границата на функцијата $f(x)$ кога x се стреми кон x_0 од лево е бројот A_1 и пишуваме $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1$.

За реалниот број A_1 велиме дека е **лева гранична вредност** или **лева граница** на функцијата $f(x)$ во точка x_0 .

Дефиниција 5: За функцијата $f(x)$ велиме дека има **лева гранична вредност** A_1 , кога x тежи кон x_0 од лево и означуваме $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1$, ако и само ако за произволен мал број $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ е исполнето неравенството $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Геометриска интерпретација на дефиницијата 5:



Пример 4. Да се најде лева гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$.

Решение: Дефиниционата област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Нека (x_n) е низа од реални броеви таква што $x_n < 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Од $x_n < 2$ имаме $x_n - 2 < 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$, од каде што следува

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n - 2} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2)} = -\infty.$$

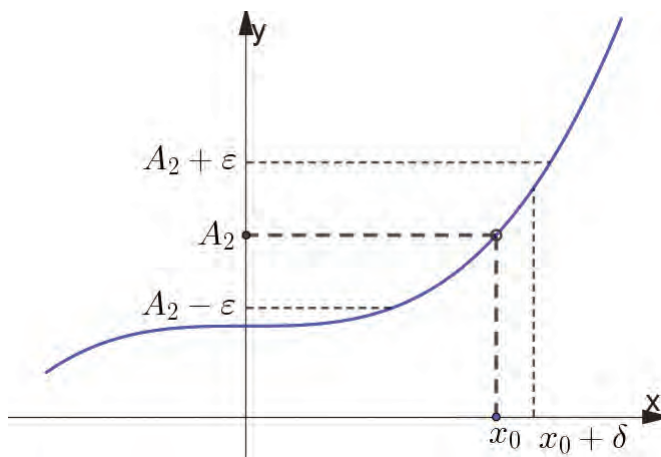
Може да запишеме дека лева гранична вредност е $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$.

Дефиниција 6: Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервал (x_0, b) освен евентуално за самиот број x_0 . Ако за секоја низа реални броеви (x_n) (за секој $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (x_0, b)$) која конвергира кон x_0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), соодветната низа $(f(x_n))$ од вредностите на функцијата е конвергентна низа која конвергира кон реалниот број A_2 ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_2$), тогаш велиме дека границата на функцијата $f(x)$ кога x се стреми кон x_0 од десно е бројот A_2 ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2$).

За реалниот број A_2 велиме дека е **десна гранична вредност** или **десна граница** на функцијата $f(x)$ во точката x_0 .

Дефиниција 7: За функцијата $f(x)$ велиме дека има **десна гранична вредност** A_2 , кога x тежи кон x_0 од десно и означуваме $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2$ ако и само ако за произволен мал број $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ е исполнето неравенството $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Геометриска интерпретација на дефиниција 7:



Пример 5. Да се најде десна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$.

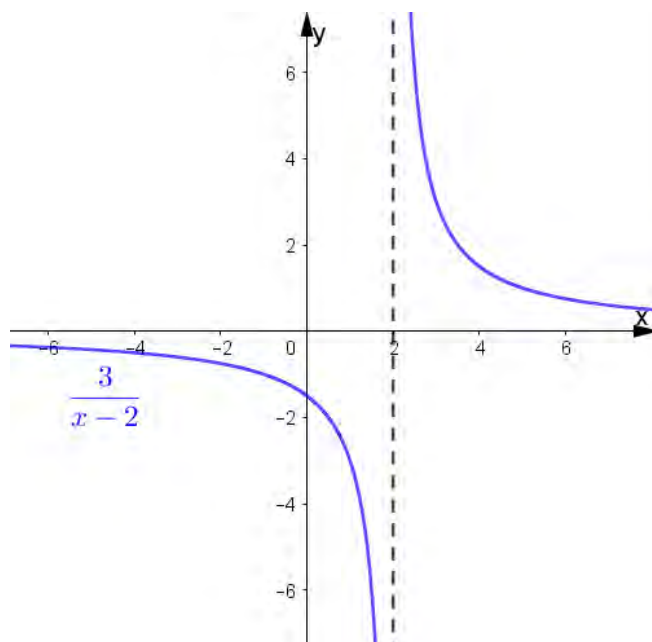
Решение: Дефиниционата област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Нека (x_n) е низа од реални броеви таква што $x_n > 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Од $x_n > 2$ имаме $x_n - 2 > 0$ за

секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$, од каде што следува

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n - 2} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2)} = +\infty.$$

Може да запишеме дека десната гранична вредност е $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x - 2} = +\infty$.

Графички претставена функцијата и односот на графикот во околина на точката со апсциса $x = 2$ (правата $x = 2$).



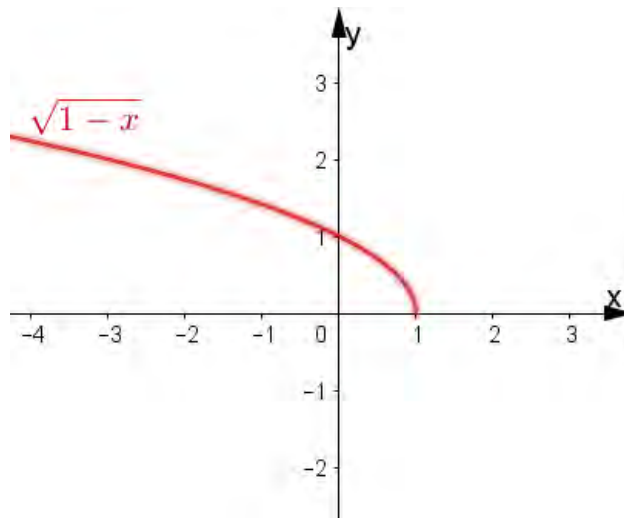
Пример 6. Нека е дадена функцијата $f(x) = \sqrt{1-x}$, дефинициона област на оваа функција е $x \leq 1$, т.е. $D_f = (-\infty, 1]$. За функцијата може да се бара само гранична вредност од лево $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}$.

Решение: Нека (x_n) е низа од реални броеви таква што $x_n < 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Од $x_n < 1$ имаме $1 - x_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 0$, од каде што следува

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - x_n} = 0.$$

Може да запишеме дека левата гранична вредност е $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$.

На цртежот, графички е претставена функцијата и граничната вредност.

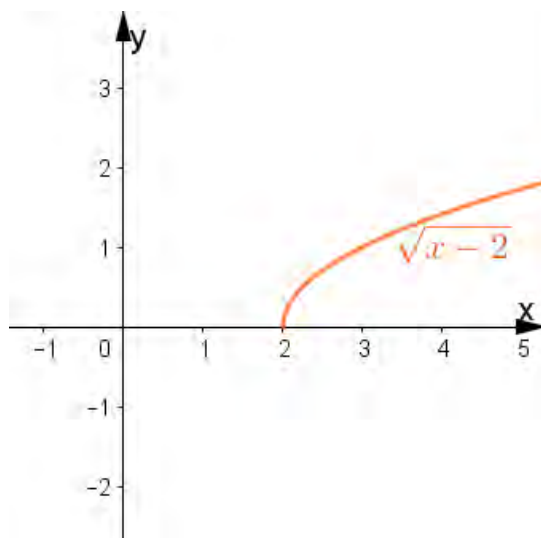


Пример 7. Нека е дадена функцијата $f(x) = \sqrt{x-2}$, дефинициона област на оваа функција е $x \geq 2$, т.е. $D_f = [2, +\infty)$. За оваа функција може да се бара само гранична вредност од десно $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}$.

Решение: Нека (x_n) е низа од реални броеви таква што $x_n > 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Од $x_n > 2$ имаме $x_n - 2 > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$, од каде што следува $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n - 2} = 0$.

Може да запишеме дека десната гранична вредност е $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$.

Графички е претставена функцијата и граничната вредност.



Забелешка:

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ функцијата има гранична вредност во $x = x_0$. (Левиот и десниот лимес на функцијата во точката $x = x_0$ се еднакви, тогаш функцијата има лимес во таа точка и тој е еднаков со левиот и десниот лимес).

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ функцијата нема гранична вредност во $x = x_0$.

Пример 8. Пресметај $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$.

Решение: Претходно пресметавме дека $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$, следува функцијата нема гранична вредност во точката $x = 2$.

Забелешка: Граничната вредност на функцијата во точка го претставува однесувањето на вредностите на функцијата во околината на таа точка.

Својства на граници на функции

Со помош на својствата на конвергентни низи можат да се докажат некои својства за граница на функција, со кои лесно може да ги определуваме граничните вредности на функцијата во дадени точки.

Теорема: Ако за функциите $f(x)$ и $g(x)$ постојат границите $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, тогаш:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ при што } B \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A, \text{ за некоја константа } c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{A}, \text{ за } n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = a^A, \text{ за } a \in \mathbb{R}, \text{ за } A \geq 0.$$

Забелешка:

Сите овие операции со гранична вредност на функција важат и кога $x \rightarrow \pm\infty$, и за лева и десна гранична вредност во точката x_0 .

Во најголем број од задачите граничната теорема не може да се применува директно, но изразите со кои се зададени функциите првин ги трансформираме до израз на кои може да се применат овие тврдења.

Пример 1. Да се пресмета гранична вредност на функцијата за дадената вредност $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$.

Решение: За да ја пресметаме граничната вредност, прво да ја пресметаме граничната вредност на именителот $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 2 + 4 = 6 \neq 0$. Согласно со дадената теорема може да пресметаме

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4)} = \frac{2^2 - 1}{2 + 4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Пример 2. Да се пресмета гранична вредност на функцијата за дадената вредност:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Решение: За граничната вредност на функциите во броителот и именителот имаме:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) = (-2)^2 - 4 = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = (-2) + 2 = 0,$$

па за граничната вредност на количникот се добива неопределеност од облик $\frac{0}{0}$. Но од ова не следува дека функцијата нема гранична вредност кога $x \rightarrow -2$. За да ја пресметаме граничната вредност, прво ќе ја трансформираме дробката, така што броителот ќе го разложиме на множители со користење на скратената формула, а потоа ќе ги кратиме со $x + 2$ (што е можно, бидејќи x се приближува кон -2 , не е еднаво на -2 , па важи $x + 2 \neq 0$), и на крај ќе ја примениме теоремата.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + x}$

Решение: Од исти причини како и задачата под а) границите на функциите во броителот и именителот се еднакви на 0, и ги запишуваме над првиот знак за еднавост, а потоа ги трансформираме броителот и именителот со разложување и кратиме со истиот множител. Така добиваме:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 7)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 7)}{(x + 1)} = \frac{0 - 7}{0 + 1} = -7$$

Во продолжение, почетните чекори ќе ги пресметуваме напамет и ќе ги запишуваме резултатите над првиот знак за еднаквост, а потоа ќе продолжуваме со трансформациите и примената на теоремата за пресметување на граничната вредност.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

Решенијата на квадратната равенка $x^2 - 4x + 3 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, па квадратниот трином во броителот се разложува на линеарни множители $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Решенијата на квадратната равенка $x^2 - 3x + 2 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, па квадратниот трином во именителот се разложува на линеарни множители $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Сега со замена и користење на теоремата за операции со гранични вредности добиваме:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{1+1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

Пример 3. Да се пресмета гранична вредност на функцијата за дадената вредност:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

Решение: Во следната задача ќе користиме постапка за рационализација на броителот.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+9} + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x+9-9} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{\sqrt{0+9} + 3}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + 3}{\sqrt{1+2x} + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-8+2x}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1+2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1+2x} + 3} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{4} + 2}{\sqrt{9} + 3} = 2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Пример 4. Да се пресмета гранична вредност на функцијата за дадената вредност:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 7}$$

Решение: Кога $x \rightarrow \infty$ броителот и именителот се бескрајно големи величини и нивниот количник е неопределен $\frac{\infty}{\infty}$, па затоа изразот претходно го трансформираме (го извлекуваме пред заграда најголемиот степен на x од броителот и именителот, а тоа во овој пример е x^2), и потоа ќе може да се користи теоремата за гранична вредност. Следува,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{1 - 0}{1 - 0 + 0} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right)}{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1 - \frac{4}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = 0 \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{3x^2 - 4}$$

Решение: Скратена постапка која може да се користи при решавање на задачи:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{3x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{1}{3}$$

Пример 5. Да се пресмета гранична вредност на функцијата за дадената вредност

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$$

Решение: Кога $x \rightarrow \infty$ првата и втората дробка се бескрајно големи величини и имаме неопределеност $(\infty - \infty)$, па затоа изразот претходно го трансформираме

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3(3x + 2) - x^2(3x^2 - 4)}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{2x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} \right)}{x^2 \cdot \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right) \cdot x \cdot \left(\frac{3x}{x} + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left(3 - \frac{4}{x^2} \right) \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2+0}{(3-0)(3+0)} = \frac{2}{9}$$

Пример 6. Да се пресмета лева гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$.

Решение: Левата гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$ ќе ја најдеме ако ја воведеме смената $x = 2 - h$, каде што $h > 0$ и $h \rightarrow 0$. Добиваме

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2-h-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{-h} = -\infty$$

Пример 7. Да се најде десна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$.

Решение: Десната гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$ ќе ја најдеме ако ја воведеме смената $x = 2 + h$, каде што $h > 0$ и $h \rightarrow 0$. Добиваме

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2+h-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h} = +\infty$$

Пример 8. Нека е дадена функцијата $f(x) = \sqrt{3-x}$, дефинициона област на оваа функција е $x \leq 3$, т.е. $D_f = (-\infty, 3]$. За оваа функција може да се бара само гранична вредност од лево $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{3-(3-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$. Воведовме смена $x = 3 - h$ каде што $h > 0$ и $h \rightarrow 0$.

Пример 9. Нека е дадена функцијата $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$, дефинициона област на оваа функција е $x \geq 1$, т.е. $D_f = [1, +\infty)$. За оваа функција може да се бара само гранична вредност од десно $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x-1})$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + \sqrt{(1+h)-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + \sqrt{h}) = 2 + 0 = 2$. Воведовме смена $x = 1 + h$ каде што $h > 0$ и $h \rightarrow 0$.

Пример 10. Функцијата $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ во $x = 2$ не е дефинирана.

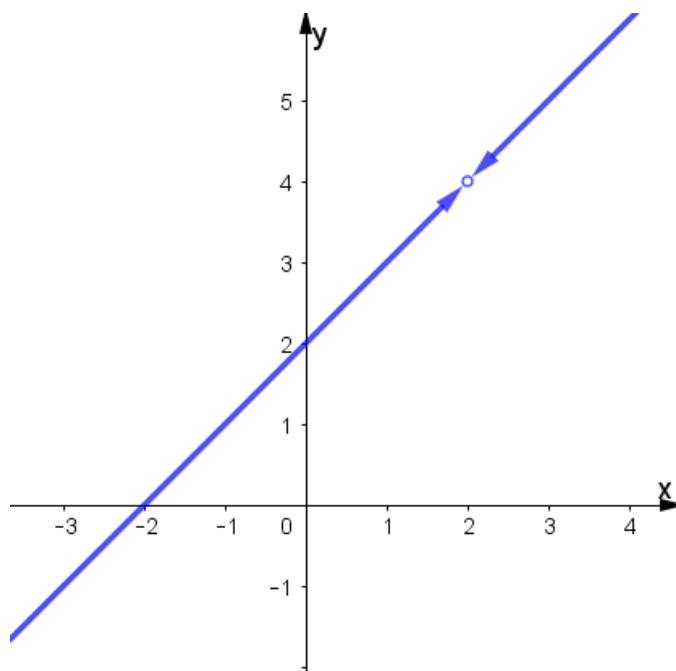
Дали $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ тежи кон одредена вредност кога $x \rightarrow 2$? Да се пресмета граничната вредност и графички да се претстави функцијата.

Решение: Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, со дефинициона област $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Да ја разгледаме вредноста на функцијата во околина на точката $x = 2$. Во следната табела се зададени некои вредности на функцијата, кои се добиени од низа со општ член $x_n = 2 + \frac{4}{10^n}$ која тежи кон 2.

x	2,4	2,04	2,004	2,0004	$\dots \rightarrow 2$
$f(x)$	4,4	4,04	4,004	4,0004	$\dots \rightarrow 4$

Графички претставена функцијата.



Функцијата не е дефинирана во точка $x = 2$, но постојат лева и десна гранична вредност, и тие се еднакви.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 - h + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h + 2) = 4$$

Следува функцијата има гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Задачи за вежбање:

1. Определи ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 5x + 1)$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-4}{3x+1}$

2. Најди лева и десна граница на функцијата:

а) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ во $x_0 = 1$

б) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$ во $x_0 = -2$

в) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 8}$ во $x_0 = 2$

г) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ во $x_0 = 1$

д) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ во $x_0 = 0$

ѓ) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ во $x_0 = 0$

3. Најди ги граничните вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 4x}{x^5 + 2x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

г) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - a}{x - a}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$

ѓ) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x-b}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{b}}$

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

4. Најди ги граничните вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1} \right)$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+5} \right)$

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x^2-4x} \right)$

г) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$

д) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{4x+3}{3x-1} - \frac{12x^2+7x+5}{9x^2-1} \right)$

ѓ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - x)$

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x-5} - x)$

5. Најди ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 9x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^2 + x + 2}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 4x - 3}{3x^2 - 4x + 1}$

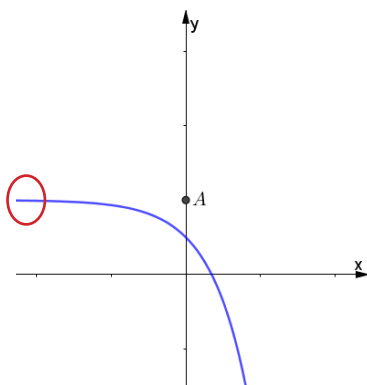
д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 3}$

ѓ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + a} - \sqrt{x})$

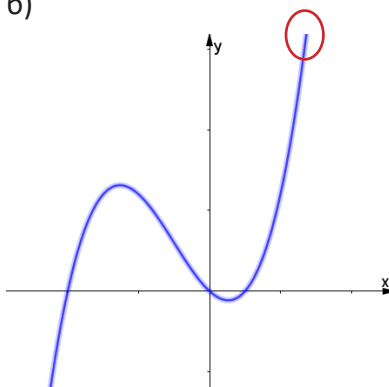
е) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + bx})$

6. Дадени се графите на функциите. Да се определат соодветните гранични вредности во полето означено со црвено.

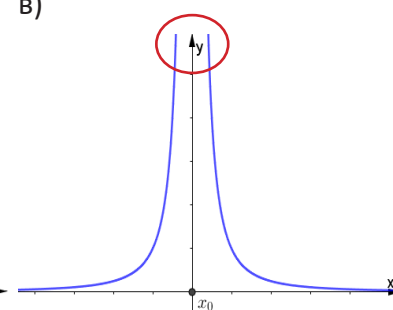
а)



б)



в)



Поврзи ги сликите со соодветните понудени одговори:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$,

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$,

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

2. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

Непрекинатост на функција е многу важен поим во математиката. Многу природни појави но и технолошки процеси се поврзани со непрекинатоста на реалните функции. Дефиницијата на поимот е поврзана со гранична вредност на функција.

Да разгледаме неколку примери на функции и да видиме што важи за нив.

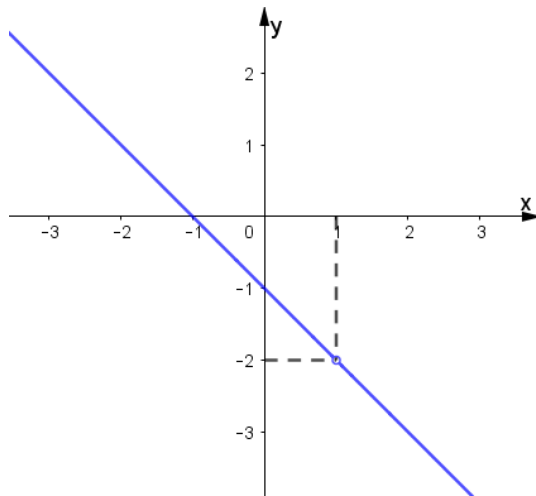
Пример 1. Да се најде граничната вредност на функциите во точка $x_0 = 1$. Што може да се заклучи за граничната вредност и вредноста на функцијата во оваа точка.

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

Решение: Дефиниционата област $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Вредноста на функцијата за $x_0 = 1$ не постои, а за граничната вредност добиваме (претавена е со празна точка)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2 \end{aligned}$$



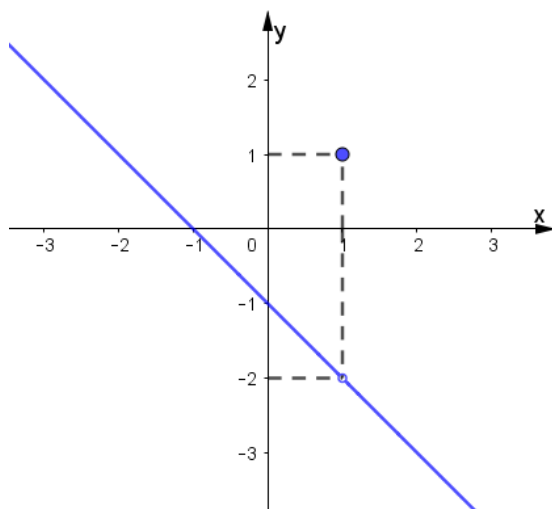
$$\text{б) } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - x}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Решение: Дефиниционата област е $D_g = \mathbb{R}$

Вредноста на функцијата за $x_0 = 1$ е $g(1) = 1$, а за граничната вредност добиваме

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2. \text{ Следува} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -2 \neq 1 = g(1)$$



$$\text{в) } h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - x}, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$$

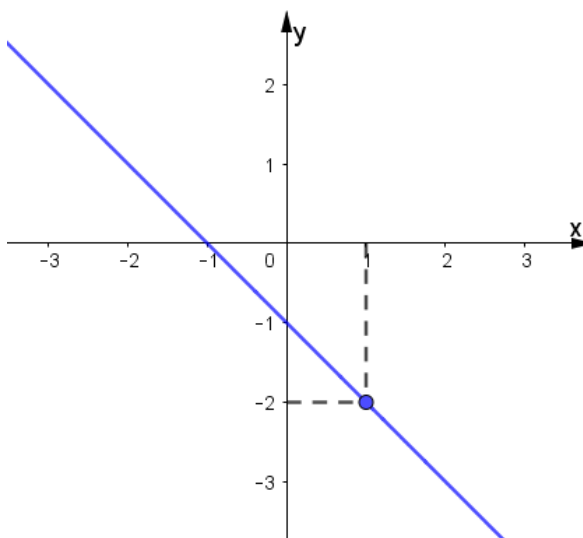
Решение: Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$

Вредноста на функцијата за $x_0 = 1$ е $h(1) = -2$, а за граничната вредност добиваме

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2. \text{ Следува}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -2 = -2 = h(1)$$



Добивме дека:

- а) Функцијата $f(x)$ не е дефинирана во точката $x_0 = 1$, но постои гранична вредност во оваа точка,
- б) Функцијата $g(x)$ е дефинирана во точката $x_0 = 1$, постои гранична вредност во оваа точка, но тие не се еднакви,
- в) Функцијата $h(x)$ е дефинирана во точката $x_0 = 1$, постои гранична вредност во оваа точка, и тие се еднакви.

Следува, дека функцијата $h(x)$ е непрекината во точката $x_0 = 1$, а функциите $f(x)$ и $g(x)$ се прекинати во таа точка.

Дефиниција 1: За функцијата $f(x)$ дефинирана на множеството D_f велиме дека е **непрекината во точката** $x = x_0$ ако:

- 1) $f(x)$ е дефинирана во точка $x = x_0$, т.е. $x_0 \in D_f$,
- 2) постои $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ако за функцијата $f(x)$ не исполнува еден од условите 1) – 3), тогаш таа е прекината во x_0 . За точката x_0 велиме дека е **точка на прекин**.

Пример 2. Да се испита непрекинатост на функцијата $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ во точка $x = 2$.

Решение: Проверуваме дали се исполнети условите од дефиницијата.

Дефинициона област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1. $2 \in D_f$ и може да се определи вредноста $f(2) = \frac{2 \cdot 2}{3-2} = 4$,

2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{3-x} = \frac{2 \cdot 2}{3-2} = 4$, т.е. постои $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$,

3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Согласно дефиницијата функцијата $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ е непрекината во точката со апсциса $x = 2$.

Пример 3. Да се испита непрекинатост на функцијата $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ во точка $x = 3$.

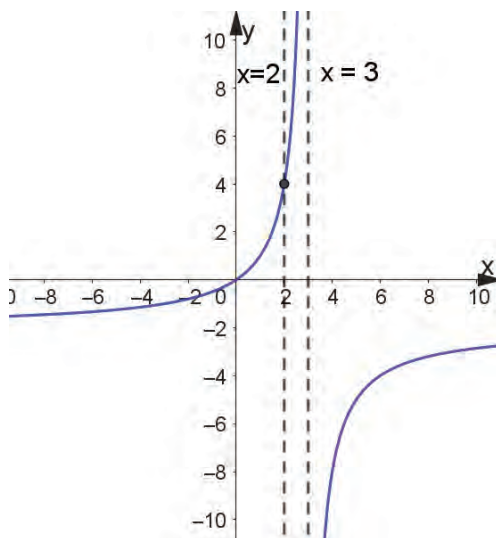
Решение: Проверуваме дали се исполнети условите од дефиницијата.

Дефинициона област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1. $3 \notin D_f$ и не може да се определи вредноста $f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3-3} = \frac{6}{0} =$ (делење со нула не е можно!!!).

Бидејќи не е исполнет еден од условите од дефиницијата, може да не продолжуваме со проверка на останатите услови, и донесуваме заклучок дека функцијата $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ има прекин во точка $x = 3$, т.е. е прекината.

Графички е претставена функцијата:



Дефиниција 2: $y = f(x)$ е непрекината на множеството $A \subseteq D_f$ ако е непрекината во секоја точка $x_0 \in A$.

Пример 4. Да се испита непрекинатост на функцијата $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$, на целата дефинициона област.

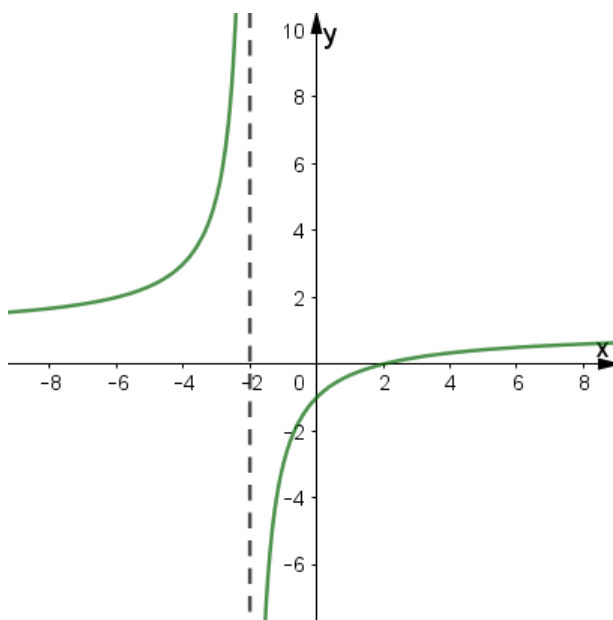
Решение: Дефинициона област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Нека a е произволен реален број различен од -2 . Следува:

1. $a \in D_f$ и може да се определи вредноста $f(a) = \frac{a-2}{a+2}$, за $a \neq -2$,
2. Постои границата $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-2}{x+2} = \frac{a-2}{a+2}$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a-2}{a+2} = f(a)$

Следува дека, функцијата $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ е непрекината во точка $x = a \in D_f$. Бидејќи a е произволен реален број од дефиниционата област на функцијата, следува дека функцијата е непрекината на целата дефинициона област.

Функцијата не е определена во точката $a = -2$, па од дефиницијата следува дека таа е точка на прекин за функцијата $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

Графички претставена функцијата:



Теорема: Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати во точка $x = x_0 \in D_f \cap D_g$, тогаш во точката $x = x_0$ се непрекинати и функциите:

$$f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x) \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ако } g(x_0) \neq 0.$$

Пример 5. Да се определат точките на прекин на функцијата $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

Решение: Дефиниционата област на функцијата е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Да разгледаме прво во секоја точка од дефиниционата област.

1. $a \in D_f$ и може да се определи вредноста $f(a) = \frac{a+2}{a^2-4}$, за $a \neq -2$ и $a \neq 2$,
2. Постои границата $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{a+2}{a^2-4}$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a+2}{a^2-4} = f(a)$.

Следува дека функцијата е непрекнатата за секоја точка $a \in D_f$.

Функцијата не е определена во точките $x = -2$ и $x = 2$, па од дефиницијата следува дека тие се точки на прекин за функцијата $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

За граничните вредности во овие точки добиваме:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Следува } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

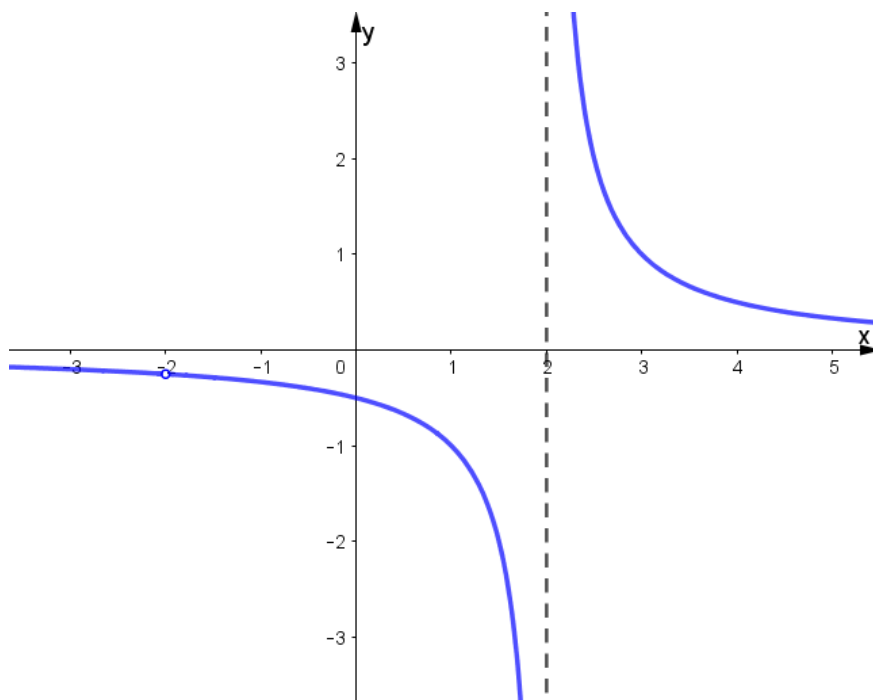
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\text{Следува } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

Добивме дека во точката на прекин $x = -2$ функцијата има гранична вредност, но во точката на прекин $x = 2$ нема гранична вредност, ниту бесконечна граница.

Графикот на функцијата е:



Забелешка: Полиномната функција $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, за $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ е непрекината на целото множество реални броеви.

Доказот е на сличен начин како првиод дел од пример 5.

Пример 6. Да ја испитае непрекинатост на функцијата $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$.

Решение: За $x \leq 0$, $f(x)$ е константна функција, т.е. $y = -1$, што е непрекината во секоја точка.

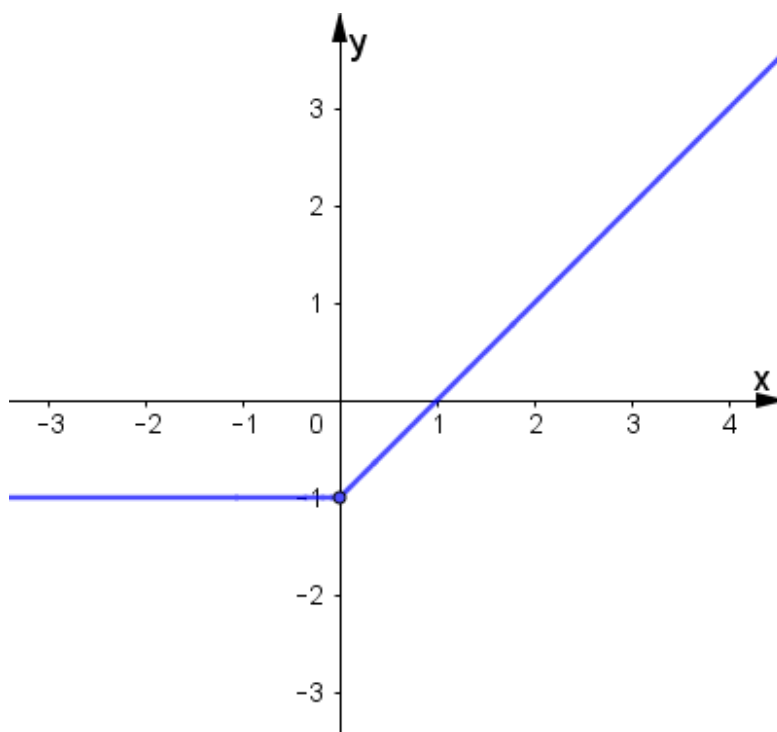
За $x > 0$, $f(x)$ е полиномна функција од прв степен и е непрекината во секоја точка.

Единствена критична точка е $x = 0$, бидејќи на лево и десно од точката функцијата е определена со различни изрази. Да провериме за $x = 0$.

1. $f(0) = -1$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$, следува $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$,
3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$.

Добивме дека, функцијата е непрекината во $x = 0$.

Графички претставена функцијата:



Пример 7. Дали функцијата $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 4 \\ x + 4, & x > 4 \end{cases}$ е непрекината?

Решение: Ги разгледуваме “проблематичните точки” $x = 0$ и $x = 4$. Во сите останати точки, т.е. интервали, функцијата е непрекината.

Проверуваме за $x = 0$ во условите од дефиницијата:

1. $f(0) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, следува па $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Добиваме дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x = 0$.

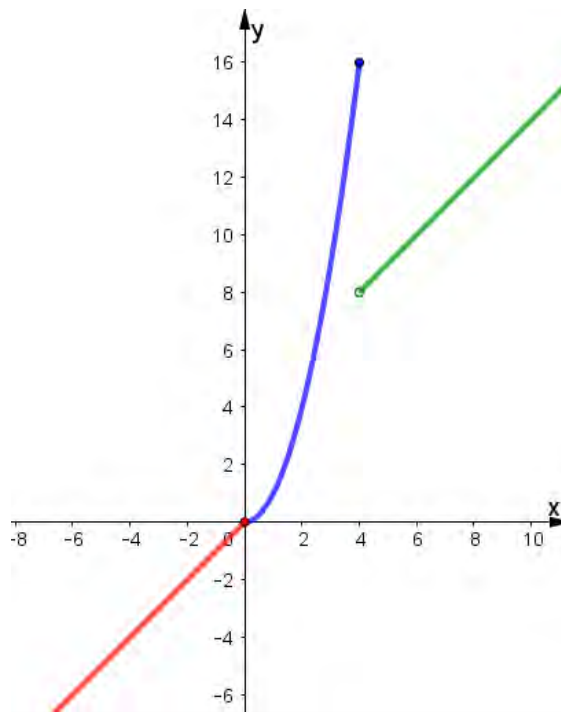
Сега проверуваме за $x = 4$ во условите од дефиницијата:

1. $f(4) = 16$,
2. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 = 16$ и $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$,

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ па $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ не постои.

Според тоа функцијата е прекината во точката $x = 4$.

Графикот на функцијата е:

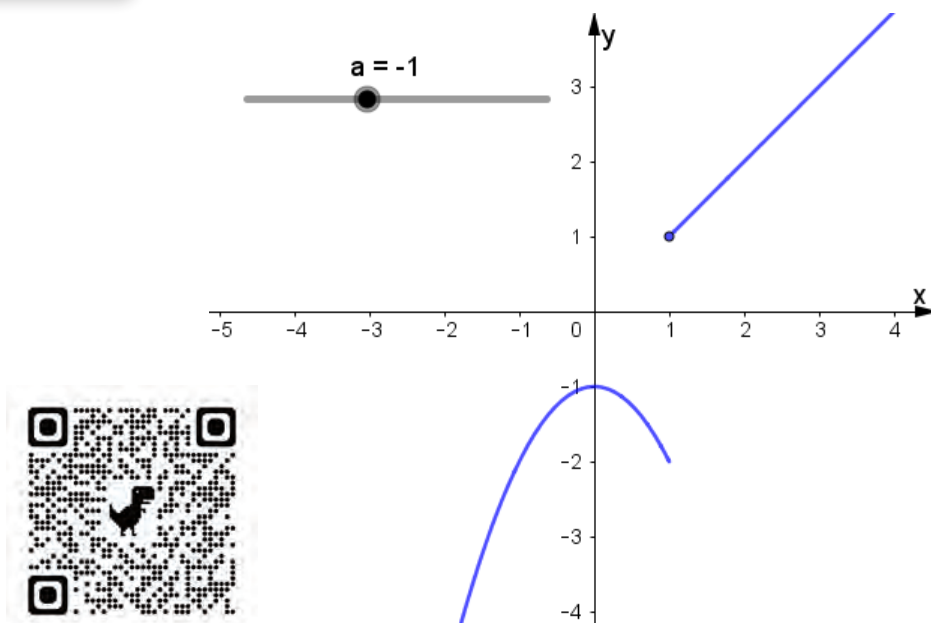


Пример 8. Дали постои реален број a така што функцијата $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ е непрекината?

Решение: Прво да истражуваме. Користејќи аплет изработен во Геогebra, да го поместуваме лизгачот a и да набљудуваме за која вредност на a функцијата ќе биде непрекината.

Аплет за анимација со кој графички ќе определиме непрекинатост на функција.

Забелешка: Што треба да набљудуваме и кога ќе биде непрекината? Со поместување на вредноста на лизгачот се менува графикот на функцијата $ax^2 - 1$. Сакаме да добиеме двата графици да се поврзат во точка со апсциса $x = 1$.



<https://www.geogebra.org/m/suemrzya>

За $x < 1$, $f(x)$ е полиномна функција од втор степен, што е непрекината во секоја точка.

За $x \geq 1$, $f(x)$ е полиномна функција од прв степен и е непрекината во секоја точка.

Единствена критична точка е $x = 1$, бидејќи на лево и десно од точката функцијата е определена со различни изрази. За која вредност на параметарот a , функцијата $f(x)$, ќе биде непрекината за $x = 1$. Од дефиницијата имаме:

1. $f(1) = 1$,

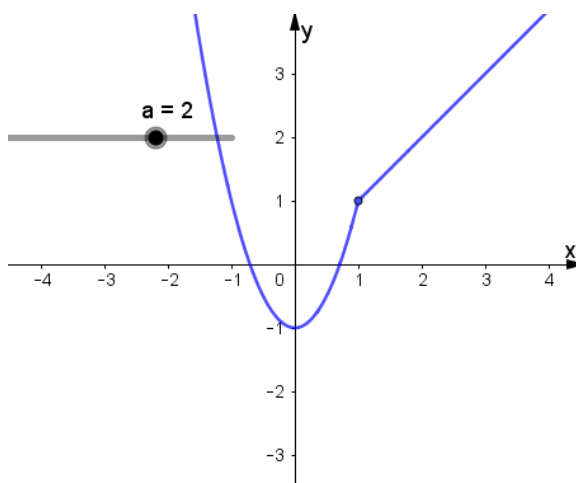
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 1) = a - 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$,

Следува дека за да постои гранична вредност треба $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, т.е. $a - 1 = 1$, од каде добиваме $a = 2$.

3. И за вредноста на $a = 2$ добиваме дека $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Следува функцијата е непрекината за $x = 1$, т.е. функцијата е непрекината за секој реален број.

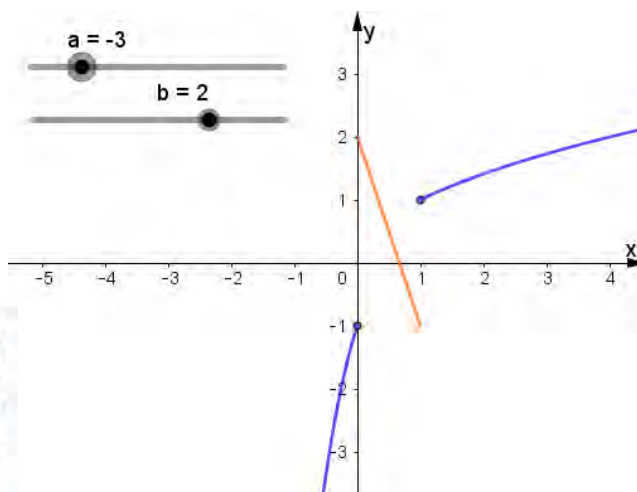
Графички претставена непрекината функцијата е:



Пример 9. За која вредност на параметрите a и b функцијата $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ е непрекината?

Решение: Прво да истражуваме. Користејќи аплет изработен во Геогebra, да ги поместуваме лизгачите a и b , и да набљудуваме за која вредност на параметрите функцијата ќе биде непрекината.

Аплет за анимација со кој графички ќе определиме непрекинатост на функција.



<https://www.geogebra.org/m/kvt6aayw>

За $x \leq 0$, $f(x)$ е непрекината функција,

За $0 < x < 1$, $f(x)$ е полиномна функција од прв степен и е непрекината во секоја точка,

За $x \geq 1$, $f(x)$ е степенска функција и е непрекината во секоја точка од областа.

Критична точки се $x=0$ и $x=1$, бидејќи на лево и десно од точките функцијата е определена со различни изрази. За која вредност на параметрите a и b , функцијата $f(x)$, ќе биде непрекината.

Од дефиницијата да определиме прво што треба да биде исполнето за функцијата да биде непрекината за $x=0$:

$$1) f(0) = (0-1)^3 = -1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^3 = -1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b,$$

Следува дека за да постои гранична вредност треба $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, т.е. $-1 = b$, од каде добиваме $b = -1$.

$$3) \text{ И за вредноста на } b = -1 \text{ добиваме дека } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0).$$

Од дефиницијата да определиме што треба да биде исполнето за функцијата да биде непрекината за $x=1$:

$$1) f(1) = \sqrt{1} = 1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}) = 1,$$

Следува за да постои гранична вредност треба $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, т.е. $a+b=1$.

$$3) \text{ И за вредноста на } a+b=1 \text{ добиваме дека } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1).$$

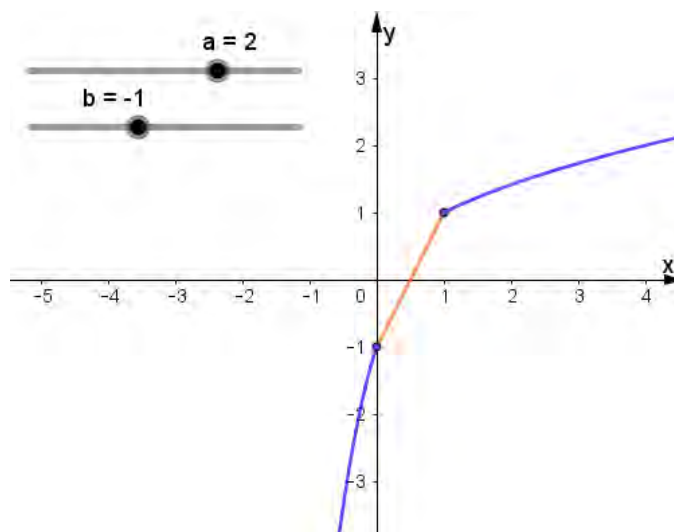
За функцијата да биде непрекината во двете точки треба да бидат исполнете двата услови, односно добиваме систем од равенки:

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}, \text{ следува } \begin{cases} b = -1 \\ a + (-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

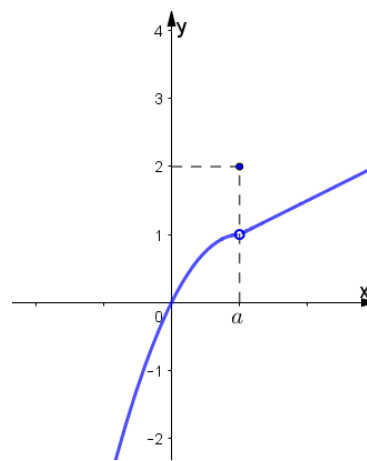
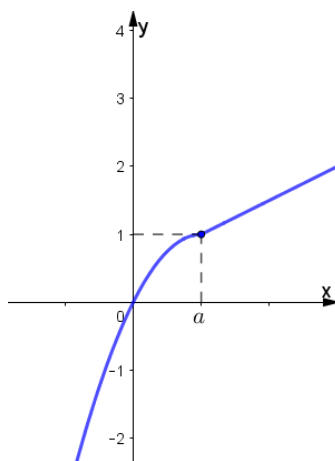
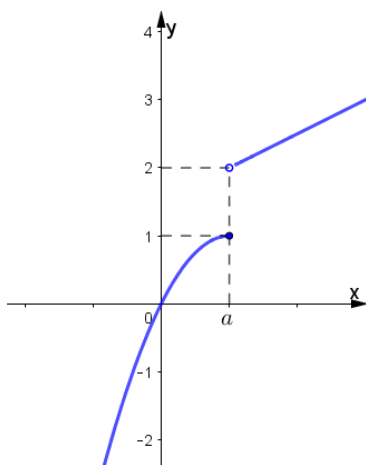
За функцијата да биде непрекината во точките $x=0$ и $x=1$, вредностите на параметрите се $a=2$ и $b=-1$ и бараната функција е:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ 2x-1, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Графички претставена непрекината функцијата е:



Пример 10. Функциите се зададени графички. Да се определи кои од следните функции се непрекинати за $x = a$, и која е граничната вредност на функцијата во точката доколку постои.



Решение:

$$f(a) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$$

Не постои гранична
вредност,

$f(x)$ е прекината за $x = a$

$$f(a) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Постои гранична

вредност $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1,$

$f(x)$ е непрекината за $x = a$

$$f(a) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Постои гранична

вредност $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1,$

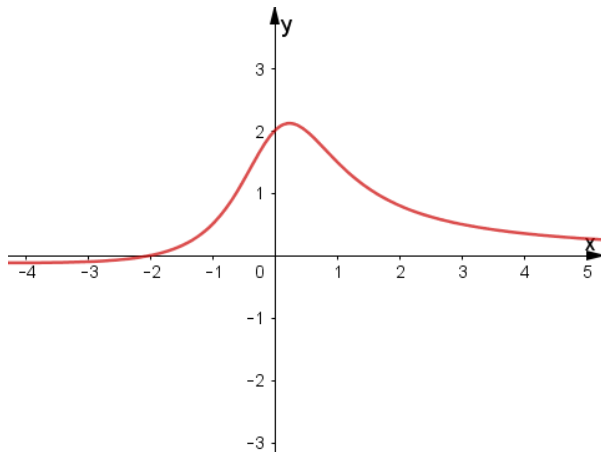
$f(x)$ е прекината за $x = a$

Задачи за вежбање:

1. Докажи ја непрекинатоста на функциите во дадената област:

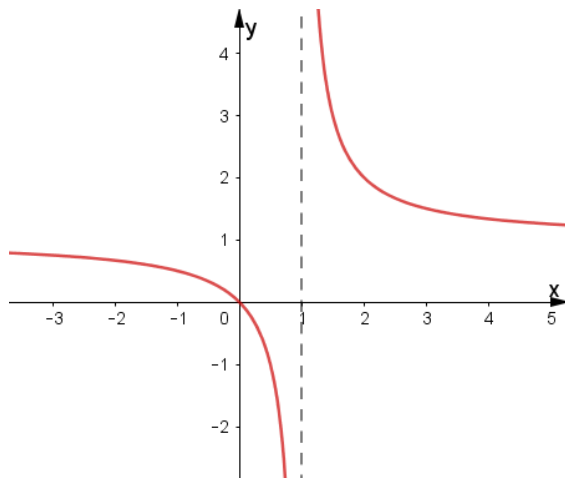
а) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$, за $x \in \mathbb{R}$

Од десна страна е претставен графикот на функцијата.



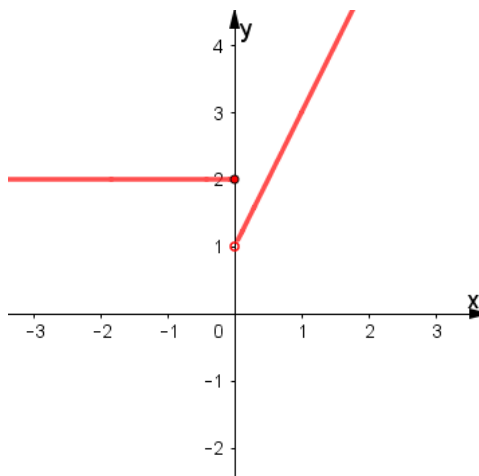
б) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Од десна страна е претставен графикот на функцијата.

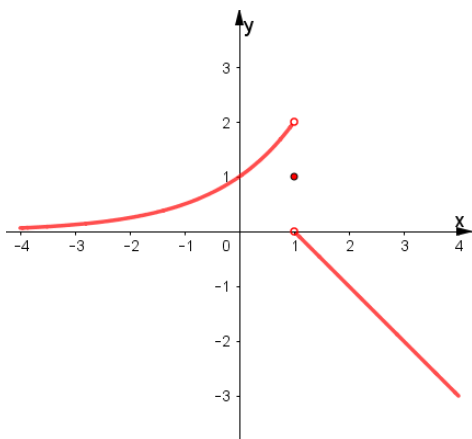


2. Најди ги точките на прекин на функциите:

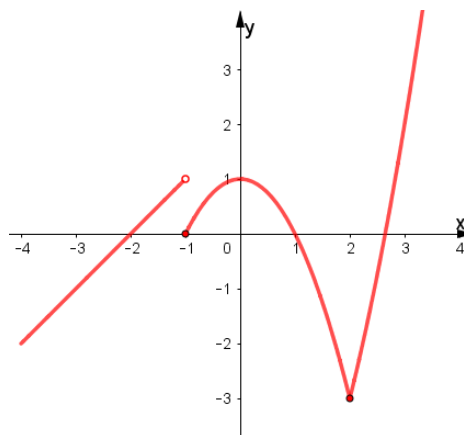
а) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$



$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & -4 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-7, & x \geq 2 \end{cases}$$



3. Месечната сметка за струја во домаќинствата во даден град е дадена со функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} 180, & 0 \leq x \leq 2 \\ 180 + 23(x-2), & x > 2 \end{cases}$$

Да се испита непрекинатоста на функцијата $f(x)$.

4. Дали може да се определи реален број a таков што функцијата $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$ да биде непрекината?

5. Дадена е функцијата $f(x) = \begin{cases} bx+1, & x < 2 \\ b-x, & x \geq 2 \end{cases}$.

Најди ја вредноста на параметарот b , така што функцијата е непрекината за сите реални броеви.

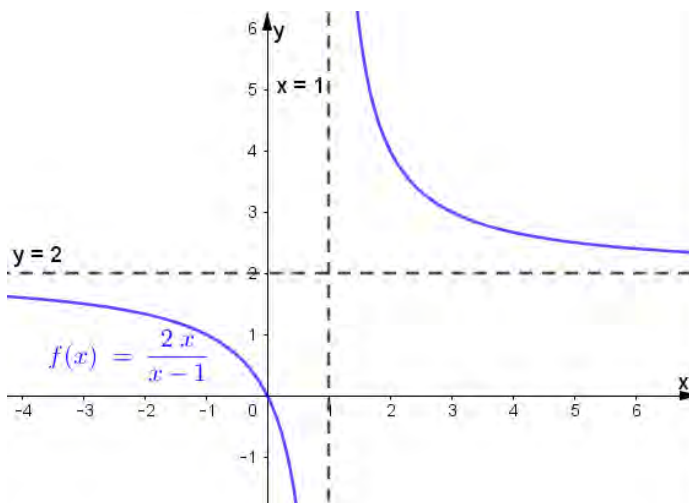
$$\text{6. Дадена е функцијата } f(x) = \begin{cases} 1-cx+dx^2, & x \leq -1 \\ x^2+x, & -1 < x < 2 \\ cx^2+dx+4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Најди ги вредностите на параметрите c и d , така што функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $(-\infty, \infty)$. Конструирај го графикот во Геогедра за да се потврди Вашиот резултат.

3. АСИМПТОТИ НА КРИВА

Во тесна врска со поимот гранична вредност на функција е поимот асимптоти на крива.

Пример 1. Нацртан е графикот на функцијата $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Што може да забележиме за однесувањето на функцијата кога графикот се приближува кон правите $x=1$ и $y=2$?



Од цртежот за правата $x=1$ може да ги воочиме следните својства:

Кога аргументот x се стреми кон 1 преку низата вредностите кои се поголеми од 1, такви што $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$, и соодветната низа од точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3), \dots$ се повеќе се доближува до правата $x=1$, а соодветната низа од вредности на функцијата $y_1, y_2, y_3, \dots$ неограничено расте, т.е. се стреми кон $+\infty$, па добиваме дека ако аргументот x се доближува од десно кон 1, графикот на функцијата се доближува до правата $x=1$ без никогаш да ја допре и притоа $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Слично се добива и за делот од графикот на кривата што е лево од правата $x=1$, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

За правата $x=1$ кое го има ова својство, велиме дека е вертикална асимптота на дадената функција (тоа е права паралална со y -оската и затоа се нарекува **вертикална асимптота**).

Од цртежот за правата $y=2$ може да ги воочиме следните својства:

Кога аргументот x прима големи вредности $x \rightarrow +\infty$, графикот на функцијата се доближува кон правата $y=2$ од горна страна без никогаш да ја допре. Ова значи дека $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$. Слично, се добива и кога $x \rightarrow -\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

За правата $y=2$ велиме дека е **хоризонтална асимптота**. Таа е паралелна со x -оската.

Да воведеме дефиниција за асимптота.

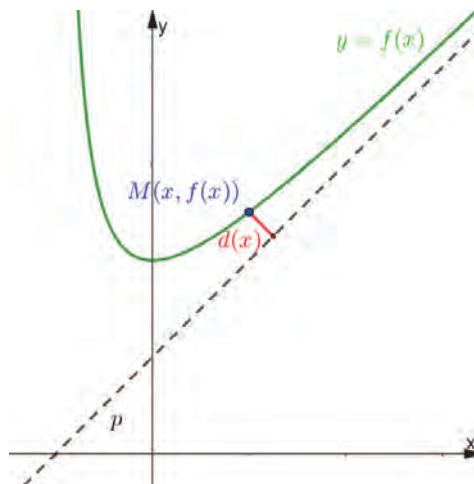
Дефиниција 1. Нека графикот на функцијата $y = f(x)$ има „гранка“ чии точки се оддалечуваат до бескрајност. Ако растојанието $d(x)$ од променливата точка $M(x, f(x))$ од графикот на функцијата до определена права p се стреми кон нула кога точката M бескрајно се оддалечува од координатниот почеток, т.е. $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$, тогаш за правата p велиме дека е **асимптота** на кривата $y = f(x)$.

Во зависност од положбата на правата p во координатниот систем, асимптотата може да биде:

хоризонтална – ако правата p е паралелна со x – оската

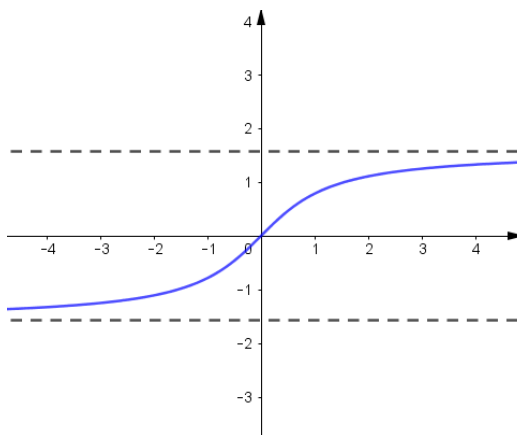
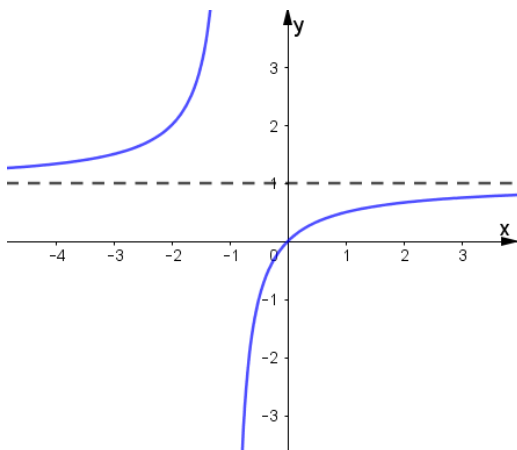
вертикална – ако правата p е паралелна со y – оската

коса – ако правата p не е паралелна со ниту една од координатните оски.



Дефиниција 2. Нека е дадена функција $y = f(x)$ дефинирана во множество $D_f = (a, +\infty)$, (или $D_f = (-\infty, a)$). Ако е исполнет условот $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), тогаш правата $y = b$ е хоризонтална асимптота за функцијата $y = f(x)$.

Некои можни положби на графикот на функцијата во однос на хоризонталната асимптота:



Приближувањето на графикот на функцијата кон хоризонталната асимптота може да биде од горна или долина страна на асимптотата.

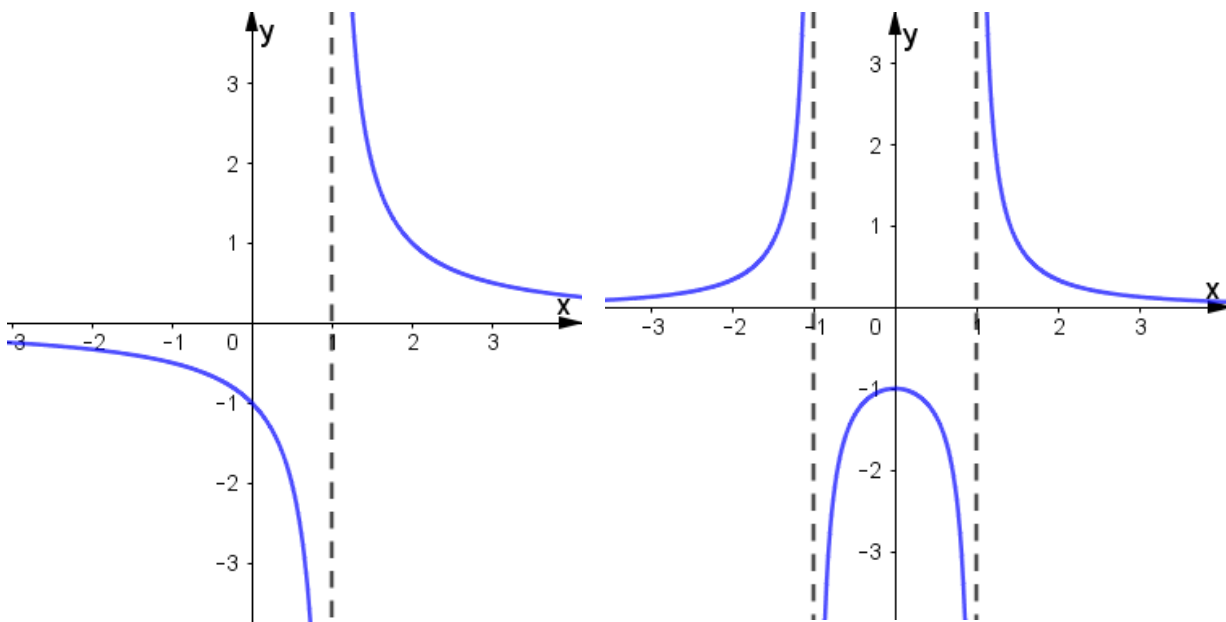
За да го одредиме од каде е приближувањето на функцијата $y = f(x)$ кон хоризонталната асимптота $y = b$, го одредуваме знакот на разликата $f(x) - b$, во зависност од аргументот x .

Ако $f(x) - b > 0$, (кога x тежи кон $\pm\infty$), тогаш графикот е над хоризонталната асимптота,

Ако $f(x) - b < 0$, (кога x тежи кон $\pm\infty$), тогаш графикот е под хоризонталната асимптота.

Дефиниција 3. Нека е дадена функција $y=f(x)$ дефинирана во околина на точката a , освен во точката a . Ако е исполнет некој од условот $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, тогаш правата $x = a$ е вертикална асимптота за функцијата $y=f(x)$.

Некои можни положби на графикот на функцијата во однос на вертикалната асимптота:



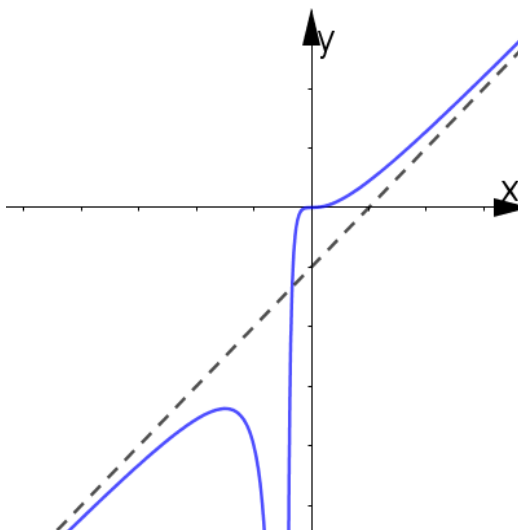
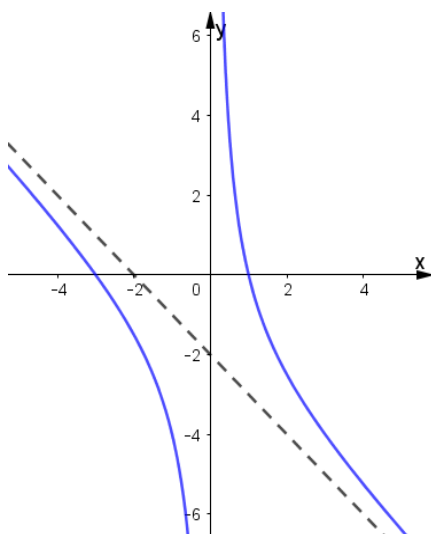
Во зависност од решението што се добива $+\infty$ или $-\infty$ се определува доближувањето на функцијата до асимптотата.

Ако решението е $+\infty$, тогаш функцијата се доближува од горна страна и тоа од десно ако $x \rightarrow a^+$, или од лево ако $x \rightarrow a^-$.

Ако решението е $-\infty$, тогаш функцијата се доближува од долна страна и тоа од десно ако $x \rightarrow a^+$, или од лево ако $x \rightarrow a^-$.

Дефиниција 4. Ако правата $y = kx + n$, $k \neq 0$ е **коса асимптота** за функцијата $y=f(x)$, тогаш броевите k и n се определуваат со формулите $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$.

Некои можни положби на графикот на функцијата во однос на косата асимптота:



Приближувањето на графикот на функцијата кон косата асимптота може да биде од горна или долна страна на асимптотата.

За да го одредиме од каде е приближувањето на функцијата $y = f(x)$ кон косата асимптота $y = kx + n$, го одредуваме знакот на разликата $f(x) - (kx + n)$, во зависно од аргументот x .

Ако $f(x) - (kx + n) > 0$, (кога x тежи кон $\pm\infty$), тогаш графикот е над косата асимптота,

Ако $f(x) - (kx + n) < 0$, (кога x тежи кон $\pm\infty$), тогаш графикот е под косата асимптота.

Пример 2. Да се определат асимптотите за функцијата $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Решение: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ т.е. функцијата е дефинирана во интервалите $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

1) Критична вредност е $x = 1$, во која функцијата може да има вертикална асимптота.

Да пресметаме $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} =$

Левата гранична вредност ќе ја најдеме ако ја воведеме смената $x = 1 - h$, каде $h > 0$ и $h \rightarrow 0$. Добиваме:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h+1}{1-h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-h}{-h} = -\infty$$

Да пресметаме $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} =$

Десната гранична вредност ќе ја најдеме ако ја воведеме смената $x = 1 + h$, каде $h > 0$ и $h \rightarrow 0$. Добиваме:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h+1}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h}{h} = +\infty$$

Бидејќи за решение добивме $\pm\infty$, следува, вертикална асимптота е правата $x = -1$, каде графикот од десно се доближува од горна страна, а од лево од долна страна.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Бидејќи за решение добивме 1, следува правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота.

Како се однесува графикот на функцијата во однос на хоризонталната асимптота?

Ја пресметуваме разликата:

$$f(x) - y = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

Го одредуваме нејзиниот знак во однос на аргументот x .

Бидејќи $\frac{2}{x-1} > 0$ за $x > 1$, следува кривата е над асимптотата за $x > 1$, и бидејќи $\frac{2}{x-1} < 0$ за $x < 1$, следува кривата е под асимптотата за $x < 1$.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = 0,$$

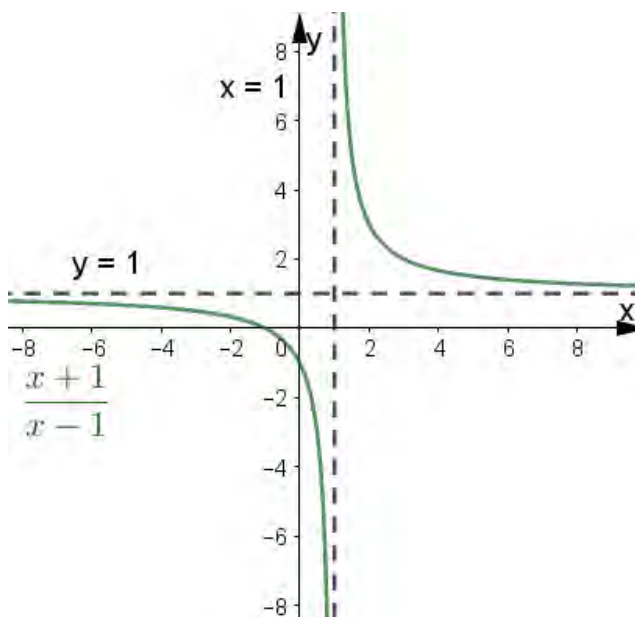
Бидејќи $k = 0$, следува функцијата нема коса асимптота.

Забелешка: Ако $k = 0$ или $k = \pm\infty$, или $n = \pm\infty$, тогаш функцијата нема коса асимптота.

Ако $k = 0$ и $n \neq \pm\infty$, тогаш се добива хоризонталната асимптота $y = 0x + n$, т.е. $y = n$.

За правилно цртање на графикот на функциите добро е кога ќе се определи асимптотата на функцијата да се определи и доближувањето на графикот на функцијата до асимптотите.

Графички претставени асимптотите на функцијата $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$:



Пример 3. Да се определат асимптотите за функцијата $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$.

Решение: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ т.е. функцијата е дефинирана во интервалите $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

1) Критична вредност во која функцијата не е дефинирана е $x = -1$, па правата со равенка $x = -1$ е можен кандидат за вертикална асимптота. Проверуваме:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} =$$

(Левата гранична вредност ќе ја најдеме, ако ја воведеме смената $x = -1 - h$, каде $h > 0$ и $h \rightarrow 0$). Добиваме:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h)^2 + 2(-1-h) + 3}{-1-h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h^2}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} =$$

(Десната гранична вредност ќе ја најдеме, ако ја воведеме смената $x = -1 + h$, каде $h > 0$ и $h \rightarrow 0$). Добиваме:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 3}{-1+h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h^2}{h} = +\infty$$

Следува, вертикална асимптота е правата $x = -1$, каде графикот од десно се доближува од горна страна, а од лево од долна страна.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \pm\infty,$$

Функцијата нема хоризонтална асимптота.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Функцијата има коса асимптота со коефициент $k = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 - x}{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Го најдовме и вториот коефициент $n = 1$.

Добивме, правата $y = x + 1$ е коса асимптота.

Како се однесува графикот на функцијата во однос на косата асимптота?

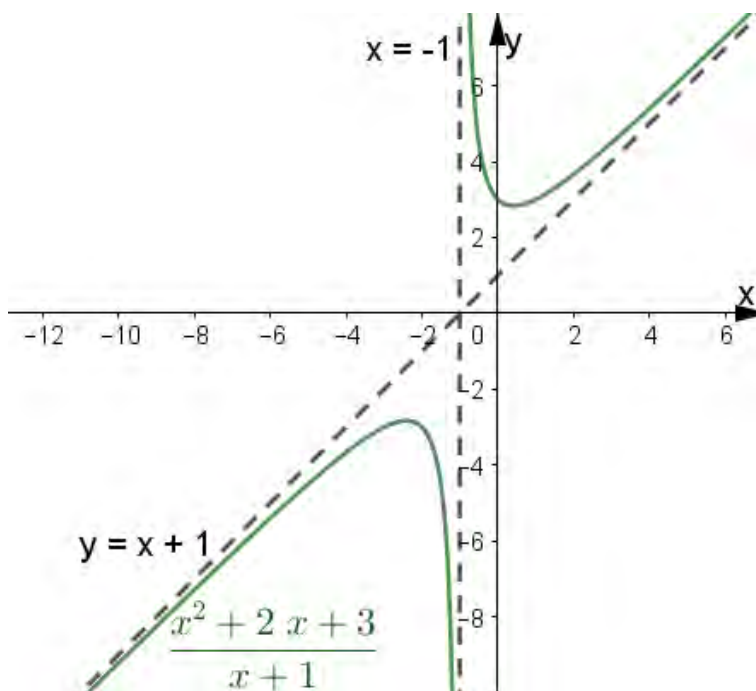
Ја пресметуваме разликата:

$$f(x) - y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} - (x+1) = \frac{x^2 + 2x + 3 - (x+1)^2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

Го одредуваме нејзиниот знак во однос на аргументот x .

Бидејќи $\frac{2}{x+1} > 0$ за $x > -1$, следува кривата е над асимптотата за $x > -1$, и бидејќи $\frac{2}{x+1} < 0$ за $x < -1$, следува кривата е под асимптотата.

Графички претставени асимптотите на функцијата:



Задачи за вежбање:

Задачи: Најди ги асимптотите на следните функции:

1) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$

3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 1}{x - 2}$

5) $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

6) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x + 2}$

7) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2}$

8) $f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$

9) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 + 2}}$

11) $f(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)}$

12) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

13) $f(x) = 2^{x+1} - 2$

14) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

15) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 4}$

4. ГРАНИЦИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ. АСИМПТОТИ НА ГРАФИЦИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

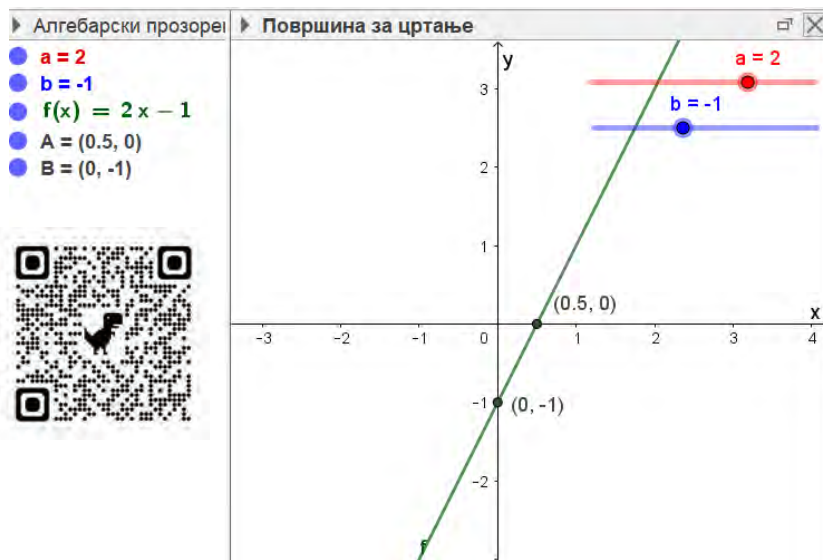
Во претходната модуларна единица се потсетивме на елементарните функции. Во овој дел ќе ги разгледаме графици и ќе определуваме гранична вредност и асимптоти на некои елементарни функции.

Прво ќе ги разгледаме карактеристичните полиномни функции, линеарната и квадратната функција.

Линеарна функција

Функцијата $f(x) = ax + b$ се нарекува линеарна функција. Дефиниционата област е множеството на реални броеви т.е. $D_f = \mathbb{R}$

Даден е пример на линеарна функција со коефициенти a и b кои во дадениот аплет во Геогebra се вредности од лизгачите за a и b .



<https://www.geogebra.org/m/d3uummybd>

Да ги поместуваме вредностите на лизгачите и да набљудуваме. Што важи за линеарната функција?

Ако $a > 0$, тогаш $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = -\infty$. Функцијата нема асимптоти.

Ако $a < 0$, тогаш $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = +\infty$. Функцијата нема асимптоти.

Пример 1. Графички претставени функциите:

а) $f(x) = 2x - 1$ б) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Да се определи гранична вредност и асимптоти.

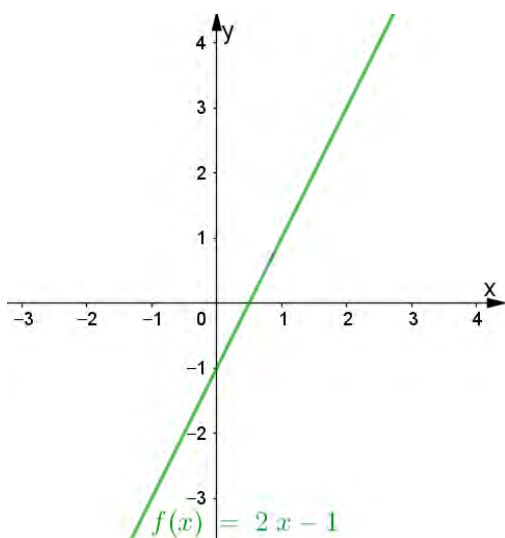
Решение:

а) $f(x) = 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

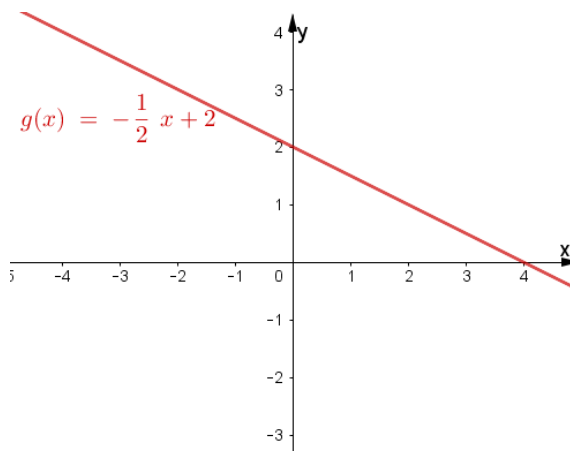
Функциите немаат асимптоти.



б) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

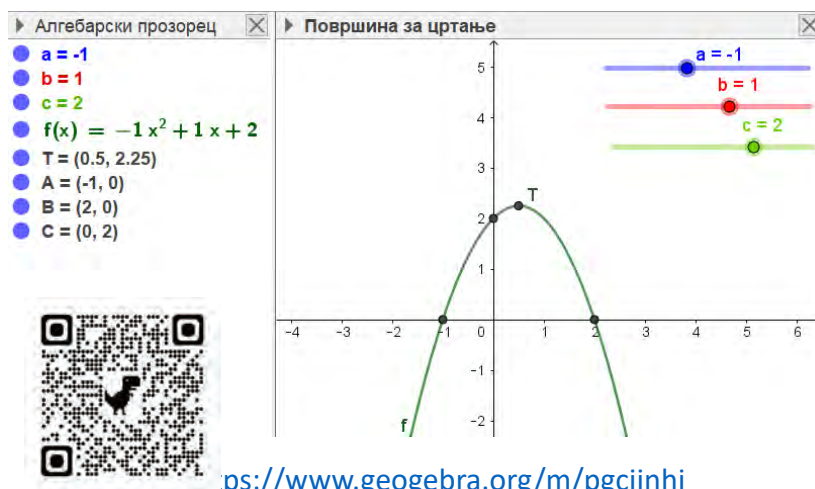
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) = +\infty$$

**Квадратна функција**

Функција $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ се нарекува квадратна функција. Дефиниционата област е множеството на реални броеви т.е. $D_f = \mathbb{R}$

Даден е пример на квадратна функција со коефициенти a , b и c , кои во дадениот аплет во Геогebra се вредности од лизгачите за a , b и c .



<https://www.geogebra.org/m/pgcijnhi>

Да ги поместуваме вредностите на лизгачите и да набљудуваме. Што важи за квадратната функција?

Ако $a > 0$, тогаш $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$. Функцијата нема асимптоти.

Ако $a < 0$, тогаш $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$. Функцијата нема асимптоти.

Пример 2. Графички претставени се функциите:

а) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

б) $g(x) = -2x^2 - x + 3$

Да се определи гранична вредност во бесконечните точки и можни асимптоти.

Решение:

а) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$$

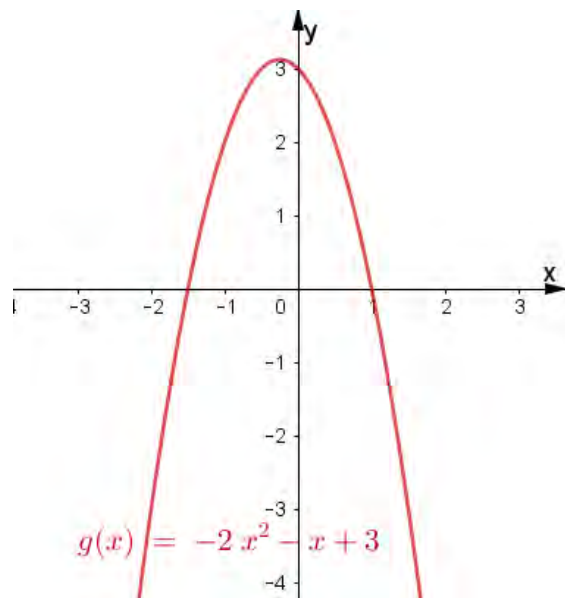
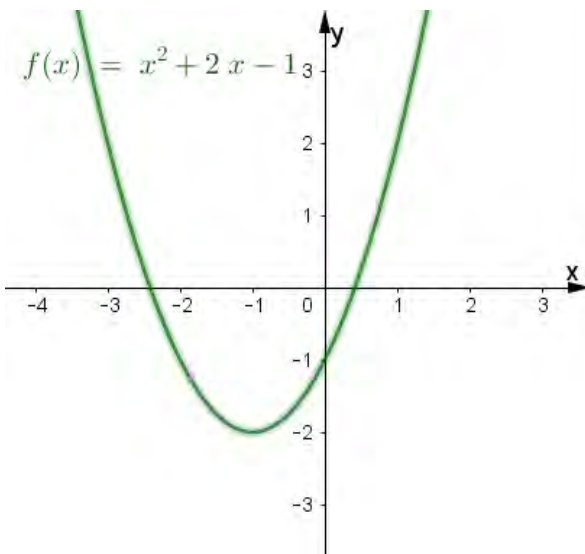
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$$

б) $g(x) = -2x^2 - x + 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - x + 3) = -\infty$$

Функциите немаат асимптоти.



Степенска функција

Ќе ја разгледаме степенската функција со експонент -1 и $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Функција $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, се нарекува степенска функција со експонент цел број. Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Да определиме гранични вредности за некои карактеристични вредности и да ги определиме асимптоти.

Решение: Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ и $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Да ги определиме следните гранични вредности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

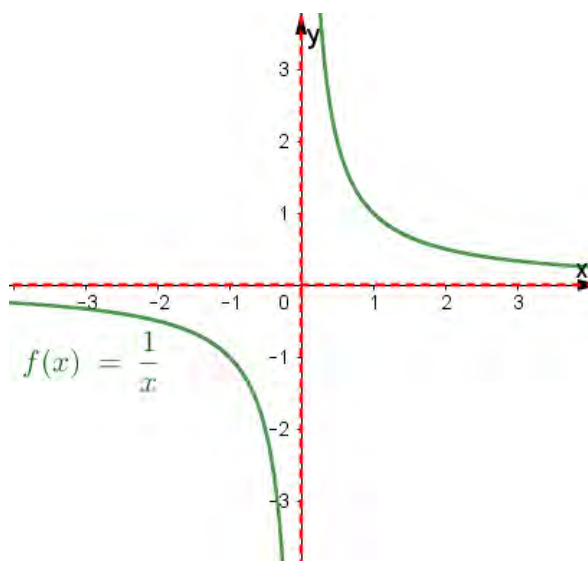
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0-h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = -\infty,$$

(воведуваме смена $x = 0 - h$, $h > 0$ и $h \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty,$$

(воведуваме смена $x = 0 + h$, $h > 0$ и $h \rightarrow 0$)



Од првите две гранични вредности следува функцијата има хоризонтална $y=0$, а од третата и четвртата гранична вредност следува функцијата има вертикална асимптота $x=0$.

Пример 4. Функција $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, се нарекува степенска функција со експонент рационален број. Дефиниционата област е $D_f = [0, +\infty)$.

Да определиме гранични вредности за некои карактеристични вредности и да ги определиме асимптоти.

Решение: Нека е дадена функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ и $D_f = [0, +\infty)$. Да ги определиме следните гранични вредности:

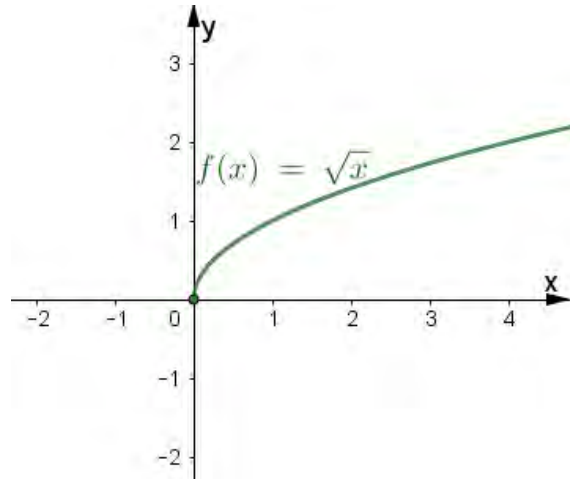
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ не може да се определи.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0,$$

(воведуваме смена $x = 0 + h$, $h > 0$ и $h \rightarrow 0$)

Функцијата нема асимптоти.



Експоненцијална функција

Функцијата $f(x) = a^x$, за $a \neq 1, a > 0$ се нарекува експоненцијална функција. Дефинициона област е $D_f = \mathbb{R}$.

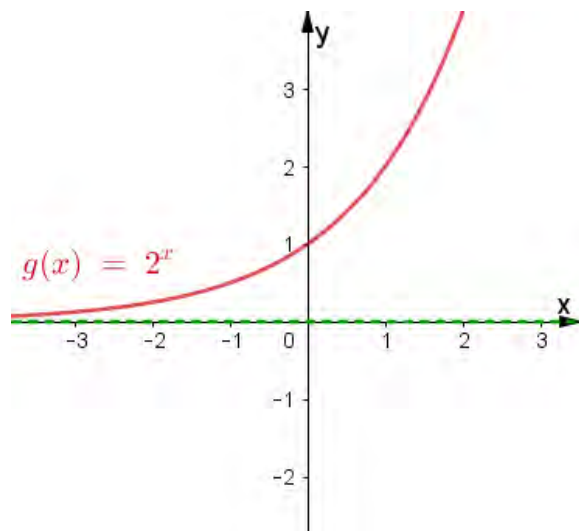
Пример 5. Функција $f(x) = 2^x$, е експоненцијална функција. Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$.

Да определиме гранични вредности за некои карактеристични вредности и да ги определиме асимптотите.

Решение: Нека е дадена функцијата $f(x) = 2^x$ и $D_f = \mathbb{R}$. Да ги определиме следните гранични вредности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$



Функцијата има хоризонтална асимптота $y = 0$, но само од лева страна кога $x \rightarrow -\infty$.

Логаритамска функција

Функцијата $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ се нарекува логаритамска функција. Дефинициона област на функцијата е $D_f = (0, +\infty)$.

Пример 6. Функција $g(x) = \lg x$, е карактеристична логаритамска функција со основа 10. Дефиниционата област е $D_g = (0, +\infty)$.

Да определиме гранични вредности за некои карактеристични вредности и да ги определиме асимптоти.

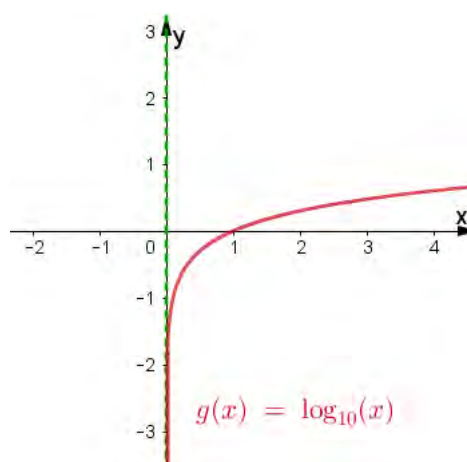
Решение: Нека е дадена функцијата $g(x) = \lg x$ и $D_g = (0, +\infty)$. Да ги определиме следните гранични вредности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ не може да се определи.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x = \lim_{h \rightarrow 0} \lg(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \lg(h) = -\infty$$

(ововедуваме смена $x = 0 + h$, $h > 0$ и $h \rightarrow 0$)

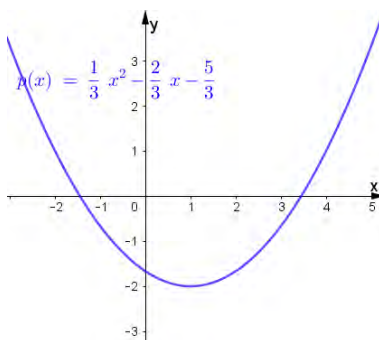


Функцијата има вертикална асимптота $x = 0$, но само од десна страна на правата.

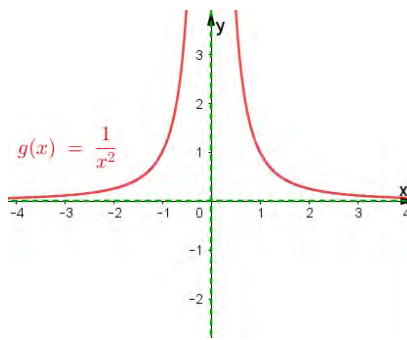
Задачи за вежбање:

1. Да се определат асимптотите на функциите зададени со нивните графици.

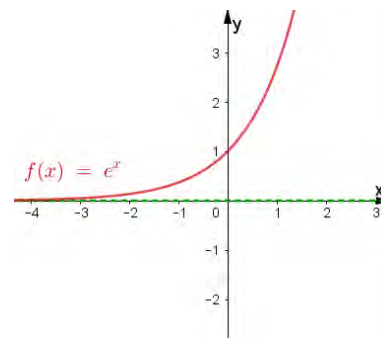
а)



б)



в)



2. Да се определат асимптотите на функциите:

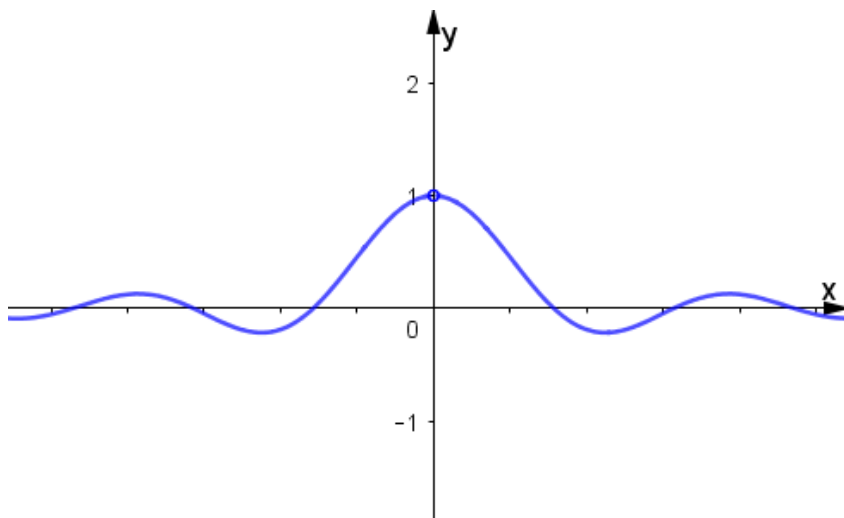
а) $f(x) = -3x + \frac{1}{4}$ б) $f(x) = 4x + 5$ в) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ г) $f(x) = -x^2 + 3x$ д) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

ѓ) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ е) $f(x) = \ln x$ ж) $f(x) = -\lg x$ з) $f(x) = e^{-x}$ с) $f(x) = 3^x$

5. СПЕЦИЈАЛНИ ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ

Во оваа модуларна единица ќе одредиме гранични вредности на некои функции кои ќе ги применуваме при пресметувањето на гранична вредност на други функции.

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Дефинициона област е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ па функцијата не е дефинирана само за $x = 0$. Графички претставена функцијата е:



Да определиме кои се вредностите што ги прима функцијата ако вредностите на аргументот се доближуваат кон 0 преку низа од позитивни броеви. Да претставиме табеларно:

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	...
$f(x)$	0.84147	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999	...

Добивме дека, ако вредностите на аргументот се доближуваат до 0, тогаш вредностите на функцијата се доближуваат кон 1.

Функцијата $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ е парна, па може да заклучиме и дека, ако вредностите на аргументот се доближуваат кон 0 од лево, тогаш и вредноста на функцијата се доближува кон 1.

Се докажува дека за секоја низа (x_n) , $x_n \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, што конвергира кон 0, соодветната низа $\left(\frac{\sin(x_n)}{x_n}\right)$ конвергира кон 1.

Тогаш, ја запишуваме граничната вредност:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример 1. Да ги определиме граничните вредности:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{4}{4} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{\sin x}$$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{5x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 5 \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 5 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1 - 5 \cdot \frac{1}{1} = 1 - 5 = -4.$$

Пример 2. Да ги определиме граничните вредности:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x}$$

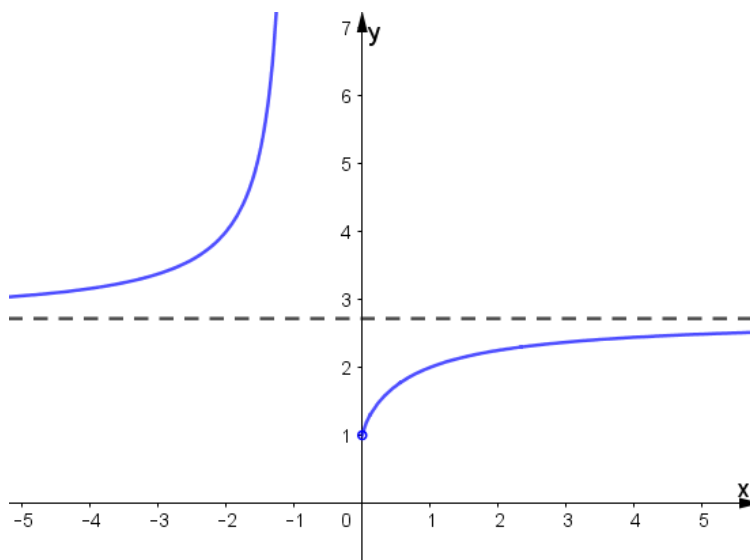
Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot \sin x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\cos 5x \cdot \sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{5}{5}}{\cos 5x \cdot \frac{\sin x}{x}} = 5 \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 5 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 5$$

Забелешка: Важи и следната гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Графички претставена функцијата е:



Нè интересира дали оваа функција има граница кога x се стреми кон ∞ . Да определиме кои се вредностите што ги прима функцијата ако вредностите на аргументот се низа од природни броеви која неограничено расте.

x	1	10	100	1000	10000	100000	...
$f(x)$	2	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183	...

Добивме дека, ако вредностите на аргументот се доближуваат кон ∞ , тогаш вредностите на функцијата се доближуваат кон e .

Се докажува дека за секоја низа (x_n) , $x_n \neq 0$ и $n \in N$, што конвергира кон ∞ , соодветната низа $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ конвергира кон e .

Тогаш, ја запишуваме граничната вредност:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Забелешка: Ако во формулата $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ замениме $\frac{1}{x} = t$, тогаш од $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, следува $t \rightarrow 0$ и може да ја запишеме формулата $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. Ако повторно ја замениме само променливата со x , ја добиваме формулата $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Пример 3. Да ги определиме граничните вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}$

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{2x-2}$

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{2x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{(4x+1) \frac{1}{4x+1} (2x-2)} =$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{4x+1} \right]^{\frac{2x-2}{4x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-2}{4x+1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2}{x-3} - 1 \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2-x+3}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-3} \right)^x =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{5}} \right)^{\frac{x-3}{5} \cdot \frac{5x}{x-3}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{5}} \right)^{\frac{x-3}{5}} \right]^{\frac{5x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x-3}} = e^5$$

Пример 4. Да докажеме дека $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, за $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение: Ако воведеме смена $a^x - 1 = t$, тогаш $a^x = 1 + t$ т.е. $x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$ и кога $x \rightarrow 0$ следува и $t \rightarrow 0$. Со замена во изразот добиваме:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

Задачи за вежбање:

1. Да се определат следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}$

2. Да се определат следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} ax \cdot \operatorname{ctg} bx)$

3. Да се определат следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x-1}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-3x+2}$

4. Да се определат следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x} \right)^{x+2}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА:

1. Определи ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 5x + 7)$

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - 7}{3x + 2}$

2. Најди лева и десна граница на функцијата:

а) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ во $x_0 = 1$

б) $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$ во $x_0 = -3$

 3. Определи ги граничните вредности (од тип $\frac{0}{0}$):

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9}$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{2x^2 + 4x - 16}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}}$

ж) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + x}$

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

 4. Определи ги граничните вредности (од тип $\infty - \infty$):

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} \right)$

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

в) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{4x+3}{3x-1} - \frac{12x^2+7x+5}{9x^2-1} \right)$

 5. Определи ги граничните вредности (од тип $\frac{\infty}{\infty}$):

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x + 4}{3x^3 + 3x^2 - x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - x^3}{x^3 + 9}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}$

6. Определи ги граничните вредности на функциите користејќи ги специјаните гранични вредности:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
---	---	--	--

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

$$г) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$ѓ) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+2}$$

$$е) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x+4}$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

7. Докажи ја непрекинатоста на функциите:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2+5}$ во $x = 3$ б) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$ на нејзината дефинициона област,

в) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$ на нејзината дефинициона област.

8. Најди ги точките на прекин на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$$

а) Во кои точки е прекината функцијата,

б) Најди ги интервалите на непрекинатост,

в) Разгледај го менувањето на вредноста на функцијата од лево и од десно во точките во кои функцијата е прекината,

г) Од колку гранки е составен графикот на функцијата?

За полесно решавање на задачата, можеш прво да го нацрташ графикот во Геогедра.

9. Најди ги асимптотите на следниве функции:

а) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

в) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$

г) $f(x) = \frac{2x-x^3}{x^2+4}$

10. Во пошта примаат пакети до 4 килограми тежина. Поштарината за пакет се пресметува според следната табела:

Маса m во килограми	Поштарина во денари
$0 < m < 1$	100
$1 \leq m < 2$	120
$2 \leq m < 3$	140
$3 \leq m < 4$	180

На овој начин зададената поштарина е функција од тежината.

Да ја означиме функцијата со f , т.е. $P = f(m)$.

а) Определи $f(0,75)$, $f(1)$ и $f(3,5)$

б) Определи $f(5)$

в) Која е дефиниционата област на функцијата?

г) Скицирај го графикот на функцијата.

д) Дали функцијата има точки на прекин?

11. Да се испита непрекинатост на функцијата $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Скицирај го графикот на функцијата.

12. Да се испита непрекинатост на функцијата $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.

Скицирај го графикот на функцијата.

13. Дали може да се определи реален број a таков што функцијата $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ биде непрекината?

14. Дадена е функцијата $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

Најди ја вредноста на параметарот a , така што функцијата е непрекината за сите реални броеви.

15. Дадена е функцијата $f(x) = \begin{cases} 3x - \sqrt{x^2 - 4}, & |x| \geq 2 \\ ax, & |x| < 2 \end{cases}$.

Најди ја вредноста на параметарот a , така што функцијата е непрекината за сите реални броеви.

Конструирај го графикот во Геогедра за да се потврди Вашиот резултат.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 4

ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

Во оваа модуларна единица ќе научиш за:

Дефиниција на извод на функција во точка

Геометриско толкување на извод

Определување на извод по дефиниција

Таблични изводи од основни елементарни функции

Извод од збир, разлика, производ и количник

Поим за сложена функција

Извод од сложена функција

Логаритамски извод

Примена на изводи за одредување равенка на тангента и нормала

Примена на извод во физика

Примена на извод за испитување тек и график на функција

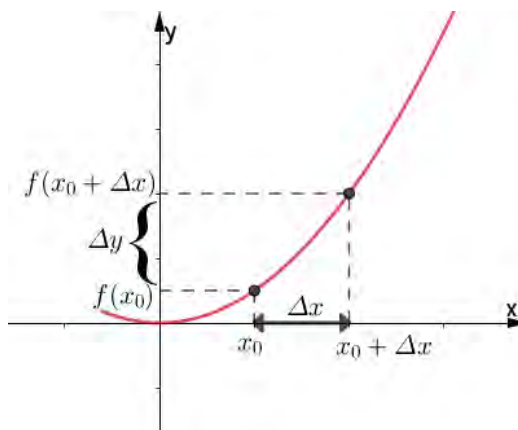
Примена на извод за решавање проблеми од екстрими

ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА

Нека функцијата $y = f(x)$ е определена на D_f и нека $x_0 \in D_f$. За дадена промена Δx на аргументот x_0 ја формираме разликата $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и ја нарекуваме нараснување на функцијата $y = f(x)$.

На цртежот графички е претставено нараснување на аргумент Δx и нараснување на функција Δy .



Пример 1. Одреди го нараснувањето на функцијата $f(x) = 2x^2$ во точка $x_0 = 1$, ако $\Delta x = 0,2$.

Решение: Од $\Delta x = 0,2$ и $x_0 = 1$, може да пресметаме:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + 0,2) - f(1) = 2 \cdot 1,2^2 - 2 \cdot 1^2 = 0,88$$

Дефиниција: Ако постои гранична вредност од количникот на нараснувањето на функцијата и аргументот кога нараснувањето на аргументот се стреми кон 0, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тогаш таа се нарекува **извод** на функција $y = f(x)$ во точката x_0 и се означува со y' или $f'(x_0)$.

Ознака:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ја претставува **средната брзина на промената** на вредноста на функцијата $y = f(x)$ кога x_0 ќе се промени за Δx .

Операцијата со која се наоѓа извод $f'(x)$ на функцијата $f(x)$ се вика **диференцирање на функцијата $f(x)$** .

Забелешка: Од физика, изводот ја претставува моменталната брзина на промената на функцијата на патот $y = f(x)$ во времето (точката) x_0 .

Заради поедноставно означување, наместо произволната точка со апсциса x_0 ќе ја означуваме само со x .

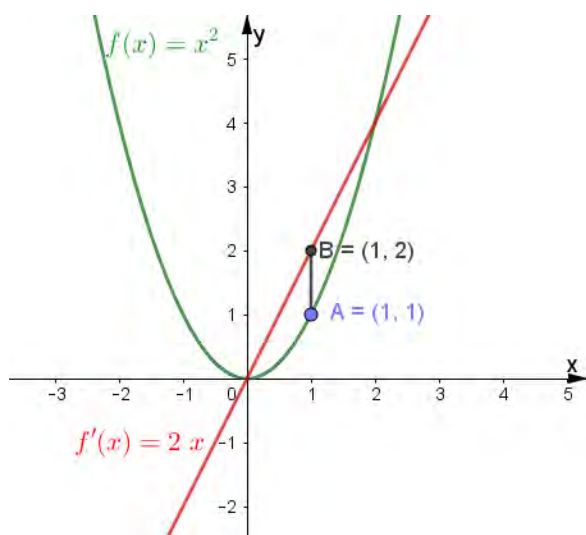
Пример 2. Да се најде извод по дефиниција на $f(x) = x^2$ во произволна точка x , а потоа да се определи изводот во точка со апсциса $x = 1$.

Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x, \text{ т.е.} \\ f'(x) &= (x^2)' = 2x. \end{aligned}$$

За $x = 1$, добиваме $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Графички да ги претставиме функциите:



Графикот на функцијата $f(x) = x^2$ е во зелена боја.

Изводот на функцијата $f'(x) = 2x$ е во црвена боја.

За $x = 1$, добиваме $f'(1) = 2$. Точката $B(1, 2)$ лежи на нормалата повлечена во точката $A(1, 1)$ од функцијата.

$y(B)$ е вредноста на првиот извод во точката со апсциса $x(A)$.

Што претставуваат графички точките од изводот на функцијата?
Дополнително ќе разгледаме подолу.

Пример 3. Да се најде извод по дефиниција на $f(x) = 2x^2$ во произволна точка x , а потоа да се определи изводот во точка со апсциса $x = 1$.

Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x) = 4x + 0 = 4x, \text{ т.е.} \\ f'(x) &= (2x^2)' = 4x. \end{aligned}$$

За $x = 1$, добиваме $f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$

Пример 4. Да се најде извод по дефиниција на $f(x) = x^4$ во произволна точка x , а потоа да се определи изводот во точка со апсциса $x = -1$.

Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\cancel{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = 4x^3 + 0 + 0 + 0 = 4x^3, \text{ т.е.} \\ f'(x) &= (x^4)' = 4x^3. \end{aligned}$$

За $x = -1$, добиваме $f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = 4 \cdot (-1) = -4$

Пример 5. Да се најде извод по дефиниција на $f(x) = \sqrt{x}$ во произволна точка x , а потоа да се определи изводот во точка со апсциса $x = 4$.

Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ т.е.} \\ f'(x) &= (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{За } x = 4, \text{ добиваме } f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Пример 6. Да се најде извод по дефиниција на $f(x) = \frac{1}{x}$ во произволна точка $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ а потоа да се определи изводот во точка со апсциса $x = 2$.

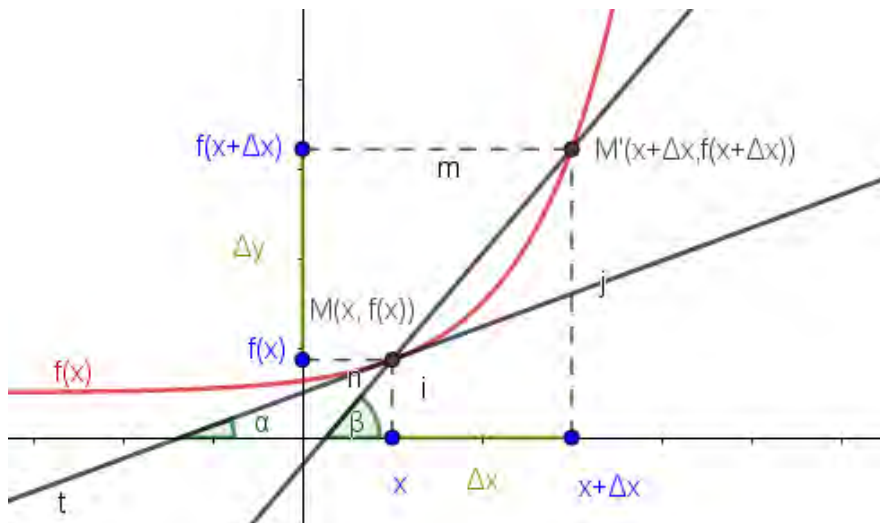
Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x)x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (x + \Delta x)x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x)x} = - \frac{1}{(x + 0)x} = - \frac{1}{x^2}. \\ f'(x) &= \left(\frac{1}{x} \right)' = - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{За } x = 2, \text{ добиваме } f'(2) = - \frac{1}{2^2} = - \frac{1}{4}$$

Геометриско толкување на изводот

Дадена е функцијата $y = f(x)$ со нејзиниот график и $M(x, y) = M(x, f(x))$ е точка од функцијата. Нека M' е точка од кривата со координати $M'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.



Аголот β е аголот што го зафаќа правата (секантата) што минува низ M и M' со x -оската, а α е аголот што го зафаќа тангентата t на кривата во точката M со x -оската.

Од $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (од правоаголен триаголник со хипотенуза $\overline{MM'}$ и агол β во темето M), се добива дека граничната вредност е

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \text{ т.е.}$$

Извод на функцијата $y = f(x)$ е коефициентот на правецот (наклонот) на тангентата t на графикот на функцијата во точката M .

За функцијата $y = f(x)$ која има конечен извод во точката x , велиме дека е **диференцијабилна** во точката x . Ако функцијата е диференцијабилна во секоја точка $x \in (a, b)$ тогаш велиме дека е **диференцијабилна** на интервалот (a, b)

Задачи за вежбање:

1. Одреди го нараснувањето на функцијата $y = f(x)$ во точка x ако нараснувањето на аргументот е Δx , во следните задачи:

а) $f(x) = x$, $x = 2$ и $\Delta x = 0.5$

б) $f(x) = x^3$, $x = 3$ и $\Delta x = 0.1$

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$ и $\Delta x = 0.01$

г) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x = 1$ и $\Delta x = 0.2$

2. Користејќи дефиниција на извод на функција најди ги изводите на функцијата во произволна точка $x \in D_f$, а потоа и во дадената точка со апсциса x .

а) $f(x) = 2x + 3$, за $x = -2$

б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, за $x = 1$

в) $f(x) = \sqrt{x+1}$, за $x = 3$

г) $f(x) = x^3$, за $x = -1$

3. Користејќи ја дефиницијата за извод на функција најди го изводот на следните функции за произволно $x \in D_f$.

а) $f(x) = 5x + 1$,

б) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$,

в) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$,

г) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

4. Користејќи дефиниција на извод на функција најди ги изводите на функцијата во произволна точка $x \in D_f$, а потоа и во дадената точка со апсциса x .

а) $f(x) = 2^x$, за $x = 0$

б) $f(x) = \ln x$, за $x = e$

в) $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$, за $x = 3$

г) $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$, за $x = 0$

5. Покажи дека следните функција немаат конечен извод во дадените точки:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$, за $x = 3$

б) $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$, за $x = 2$

в) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$, за $x = 0$

г) $f(x) = \sqrt{x+1}$, за $x = -1$

2. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ИЗВОД НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Во продолжение ќе ги определиме изводите на некои елементарни функции, а потоа ќе изведеме и некои правила за диференцирање. Истите ќе ги користиме за пресметување изводи на сложени функции.

Пример 1. Да се определи изводот на константна функција $f(x) = C$, $C = \text{const.}$

Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Добивме $(C)' = 0$, за секоја константа $C \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Да се определи изводот на степенската функција $f(x) = x^n$, за $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Решение: Од дефиниција за извод следува,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Добивме $(x^n)' = nx^{n-1}$, за $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Користејќи ја оваа формула може да ги потврдиме и формулите кои ги добивме претходно дека $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^4)' = 4x^3$

Се покажува дека формулата може да се употреби не само за $n \in \mathbb{N}$, туку и кога степенот е кој било реален број.

Користејќи ја формулата може да ги потврдиме и двете решенија од пример 5 и пример 6 од претходната модуларна единица, т.е

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Пример 3. Користејќи ја формулата за извод $(x^n)' = nx^{n-1}$ да се определи извод на функциите:

а) $f(x) = x^5,$

б) $f(x) = \frac{1}{x^2},$ за $x \neq 0$

в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}},$ за $x > 0$

Решение:

а) $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4,$

б) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3},$

в) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

Пример 4. Да го определиме изводот на логаритамската функција $f(x) = \log_a x,$ за $x \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1.$

Решение: Од дефиниција за извод и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$ следува

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

Добивме $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$ за $x \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1.$

Ако замениме $a = e$, тогаш $\log_e x = \ln x$ и $\ln e = 1$ па ќе важи следната формула $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Пример 5. Да го определиме изводот на експоненцијална функција $f(x) = a^x$, за $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение: Од дефиниција за извод и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, (за $a > 0$) следува:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a \end{aligned}$$

Добивме $(a^x)' = a^x \ln a$, за $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Ако замениме $a = e$, тогаш $a^x = e^x$ и $\ln e = 1$ па ќе важи следната формула $(e^x)' = e^x$.

Пример 6. Да се определи изводот на функцијата $f(x) = \sin x$.

Решение: Од дефиниција за извод и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, следува

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

Со примена на тригонометриската формула $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, следува дека

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \\ &= \cos(x + 0) \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

Добивме $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 7. Да се определи изводот на функцијата $f(x) = \cos x$

Решение: Од дефиниција за извод и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, следува

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

Со примена на тригонометриската формула $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, следува дека

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \end{aligned}$$

$$= -\sin(x + 0) \cdot 1 = -\sin x$$

Добивме $(\cos x)' = -\sin x$.

Пример 8. Да се определи изводот на функцијата $f(x) = \operatorname{tg} x$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Решение: Од дефиниција за извод и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, следува

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cos x}}{\Delta x} = \end{aligned}$$

Со примена на тригонометриската формула $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$, следува дека

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos(x + 0)} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Добивме $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Пример 9. Да се определи изводот на функцијата $f(x) = \operatorname{ctg} x$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Решение: Од дефиниција за извод и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, следува

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x) \sin x - \sin(x + \Delta x) \cos x}{\sin(x + \Delta x) \sin x}}{\Delta x} = \end{aligned}$$

Со примена на тригонометриската формула $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$, следува дека

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - x - \Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(-\Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\sin x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x + \Delta x)} = \\ &= - \frac{1}{\sin x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sin(x + 0)} = - \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = - \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Добивме $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Пресметувањето на извод на функција се врши со помош на таблица за извод на елементарни функции и правила за пресметување на извод на функции кои не се елементарни.

Користејќи ги резултатите кои претходно ги добивме, може да ја составиме таблицата од извод на елементарни функции

Таблица на изводи на елементарни функции:

1. $(C)' = 0$, $(C = \text{const})$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
 - 2.1. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, за $x \in \mathbb{R}^+$
 - 2.2. $(x)' = 1$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, за $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. $(e^x)' = e^x$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ за } x \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ за } x \in \mathbb{R}^+$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Други формули кои ќе ги земеме без да ги изведеме и треба да се запомнат се:

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Пример 10. Користејќи ги табличните изводи пресметај ги изводите:

$$\text{а) } y' = (x^3)'$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{1}{x^5}\right)'$$

$$\text{в) } y' = (\sqrt[4]{x})'$$

Решение:

$$\text{а) } y' = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

$$\text{в) } y' = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Пример 11. Користејќи ги табличните изводи пресметај ги изводите:

$$\text{а) } y' = (e^x)'$$

$$\text{б) } y' = (5^x)'$$

$$\text{в) } y' = (\log_2 x)'$$

Решение:

$$\text{а) } y' = (e^x)' = e^x$$

$$\text{б) } y' = (5^x)' = 5^x \ln 5$$

$$\text{в) } y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$$

Задачи за вежбање:

1. Да се пресмета изводот на функциите:

$$\text{а) } f(x) = x^7$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt[5]{x^2}$$

$$\text{в) } f(x) = 5$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{1}{x^4}$$

2. Да се пресмета изводот на функциите:

$$\text{а) } f(x) = 7^x$$

$$\text{б) } f(x) = \log_7 x$$

$$\text{в) } f(x) = \ln x$$

$$\text{г) } f(x) = \operatorname{ctgx}$$

3. Да се пресмета изводот на функциите:

$$\text{а) } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\text{б) } f(x) = \log_3 x$$

$$\text{в) } f(x) = \cos x$$

$$\text{г) } f(x) = \operatorname{tg} x$$

4. Да се пресмета изводот на функциите:

$$\text{а) } f(x) = e^x$$

$$\text{б) } f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\text{в) } f(x) = x$$

$$\text{г) } f(x) = \arcsin x$$

5. Да се пресмета изводот на функциите:

$$\text{а) } f(x) = 2^x \cdot 3^x$$

$$\text{б) } f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

$$\text{в) } f(x) = x\sqrt[3]{x}$$

$$\text{г) } f(x) = \arccos x$$

3. ИЗВОД ОД ЗБИР, РАЗЛИКА, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

Определувавање на извод на функции добиени со некои од аритметичките операции, по дефиниција е долг и сложен процес. За одредување извод на вака добиени функции постојат одредени правила кои овозможуваат многу полесно наоѓање на изводот.

ИЗВОД ОД ЗБИР И РАЗЛИКА НА ФУНКЦИИ

Да разгледаме функција која може да се претстави како збир на две функции $u(x)$ и $v(x)$, кои се диференцијабилни и постои $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ и $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

Според дефиниција за извод да определиме:

$$\begin{aligned} (u(x) + v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Следува, $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

Слично, и за разлика на две функции може да се докаже следната формула за разлика

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x).$$

Пример 1. Да се определи изводот на функциите:

а) $y = x^2 + \sin x$

б) $y = x^5 - e^x$

Решение:

а) $y' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

б) $y' = (x^5 - e^x)' = (x^5)' - (e^x)' = 5x^4 - e^x$

Забелешка: Ова правило може да се воопшти и важи за збир и разлика на три и повеќе функции.

Пример 2. Да се определи изводот на функциите:

а) $y = x^3 + \cos x + 3^x$ б) $y = x - \operatorname{tg} x + \ln x - 2$

Решение:

а) $y' = (x^3 + \cos x + 3^x)' = (x^3)' + (\cos x)' + (3^x)' = 3x^2 - \sin x + 3^x \ln 3$

б) $y' = (x - \operatorname{tg} x + \ln x - 2)' = (x)' - (\operatorname{tg} x)' + (\ln x)' - (2)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x} - 0 = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x}$

ИЗВОД ОД ПРОИЗВОД НА КОНСТАНТА СО ФУНКЦИЈА

Да разгледаме функција која може да се претстави како производ на константа со $C = \text{const}$ функција $u(x)$, која е диференцијабилна и постои $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$.

Според дефиниција за извод да определиме:

$$\begin{aligned} (C \cdot u(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot (u(x + \Delta x) - u(x))}{\Delta x} = \\ &= C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = C \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Следува, $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$.

Пример 3. Да се определи изводот на функциите:

а) $y = \frac{1}{3}x^3$ б) $y = 4 \cos x$

Решение:

а) $y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

б) $y' = (4 \cos x)' = 4(\cos x)' = 4 \cdot (-\sin x) = -4 \sin x$

ИЗВОД ОД ПРОИЗВОД НА ФУНКЦИИ

Да разгледаме функција која може да се претстави како производ на две функции $u(x)$ и $v(x)$, кои се диференцијабилни и постои $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ и $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

Според дефиниција за извод да определиме:

$$\begin{aligned}
 (u(x) \cdot v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \\
 &= u'(x) \cdot v(x + 0) + u(x) \cdot v'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)
 \end{aligned}$$

Следува, $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Пример 4. Да се определи изводот на функциите:

а) $y = x^3 \cdot \sin x$

б) $y = x^2 \ln x$

в) $y = (x^2 - 3x) \cdot e^x$

Решение:

а) $y' = (x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

б) $y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$

в) $y' = ((x^2 - 3x)e^x)' = (x^2 - 3x)' e^x + (x^2 - 3x)(e^x)' =$
 $= (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x)e^x = e^x(2x - 3 + x^2 - 3x) = e^x(x^2 - x - 3)$

Забелешка: Ова правило може да се воопшти и важи за производ на три и повеќе функции.

Пример 5. Да се определи изводот на функциите:

а) $y = x^3 \cos x \ln x$

б) $y = x^2 e^x \ln x$

Решение:

а) $y' = (x^3 \cdot \cos x \cdot \ln x)' = (x^3)' \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (\cos x)' \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot (\ln x)' =$
 $= 3x^2 \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (-\sin x) \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cos x \ln x - x^3 \sin x \ln x + x^2 \cos x$

б) $y' = (x^2 e^x \ln x)' = (x^2)' e^x \ln x + x^2 (e^x)' \ln x + x^2 e^x (\ln x)' =$
 $= 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x^2 e^x \cdot \frac{1}{x} = 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x e^x = x e^x (2 \ln x + x \ln x + 1)$

ИЗВОД ОД КОЛИЧНИК НА ФУНКЦИИ

Да разгледаме функција која може да се претстави како количник на две функции $u(x)$ и $v(x)$, $v(x) \neq 0$ во точка x , кои се диференцијабилни и постои $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ и $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

Според дефиниција за извод да определиме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}}{\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot v(x) \cdot v(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x))v(x) - u(x)(v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x \cdot v(x) \cdot v(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x) \cdot v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

Следува, $\boxed{\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}.$

Пример 6. Да се определи изводот на функциите:

а) $y = \frac{2x}{x+3}$

б) $y = \frac{1+x^3}{1-x^3}$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \left(\frac{2x}{x+3} \right)' = \frac{(2x)'(x+3) - 2x(x+3)'}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot (x+3) - 2x \cdot (1+0)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' = \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \\ &= \frac{(0+3x^2)(1-x^3) - (1+x^3)(0-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{3x^2 - 3x^5 + 3x^2 + 3x^5}{(1-x^3)^2} = \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}. \end{aligned}$$

Правилата за диференцирање може да ги запишеми и да ги запомнеме, при што за пократко запишување ќе ги користиме функциите $u(x) = u$ и $v(x) = v$,

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ - извод од збир и разлика на функции

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$, за $C = \text{const}$ - извод од производ на константа со функција

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - извод од производ на функции

$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, за $v(x) \neq 0$ - извод од количник на функции

Пример 7. Да се определи изводот на функциите:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

б) $f(x) = x^3 \cos x$

в) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 1}$

г) $f(x) = x \sin x - \cos x$

д) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 + \cos x}$

е) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Решение:

а) $f'(x) = (3x^2 - 2x + 5)' = 6x - 2$;

б) $f'(x) = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$;

$$\begin{aligned} \text{в) } f'(x) &= \left(\frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^4 - 3x^3 + 1)'(2x^2 - 1) - (x^4 - 3x^3 + 1)(2x^2 - 1)'}{(2x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{(4x^3 - 9x^2 + 0)(2x^2 - 1) - (x^4 - 3x^3 + 1)(4x - 0)}{(2x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{8x^5 - 18x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x^5 + 12x^4 - 4x}{(2x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{4x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x}{(2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad f'(x) &= (x \sin x - \cos x)' = (x \sin x)' - (\cos x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' - (\cos x)' = \\ &= \sin x + x \cos x + \sin x = 2 \sin x + x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 2}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(x^2 + 2)'(1 + \cos x) - (x^2 + 2)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(2x + 0)(1 + \cos x) - (x^2 + 2)(0 - \sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2x + 2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ѓ)} \quad f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(1+0)(x-1) - (x+1)(1-0)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Задачи за вежбање:

Со помош на таблицата за изводи и на правилата за диференцирање одреди ги изводите на функциите:

1. $f(x) = 5x$

2. $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

3. $y = x^3 - 3x + 2$

4. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + x^2 - 4x + 8$

5. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}$

7. $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$

8. $f(x) = x^2 - 2 \sin x$

9. $f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x$

10. $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 5^x$

11. $f(x) = x^4 \ln x$

12. $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

13. $f(x) = 2x \cdot \sin x$

14. $f(x) = x^{12} e^x \operatorname{tg} x$

15. $y = e^x \cdot \arcsin x$

16. $y = (3x^2 + 1)(2x - 4)(x^3 - 1)$

17. $f(x) = x^2 - \sin x \cos x$

18. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

19. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$

20. $y = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$

21. $y = \frac{x-1}{x^2-4}$

22. $y = \frac{x+3}{x^2-4}$

$$23. y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$25. y = \frac{xe^x}{\sin x}$$

$$27. f(x) = 2 \sin x - \frac{1}{2}e^x + 7 \operatorname{arctg} x + 2$$

$$29. f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$31. y = \sqrt[7]{x^6} + \log_6 x - \operatorname{tg} x$$

$$33. f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$$

$$35. y = \frac{\ln x \cdot \cos x}{x^2}$$

$$37. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$39. y = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt{x}}$$

$$24. f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$26. f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$28. y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3}$$

$$30. y = \frac{e^x + \cos x}{xe^x}$$

$$32. y = x^4 \cdot e^x \cdot \sin x$$

$$34. y = \frac{e^x + \sin x}{xe^x}$$

$$36. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$38. y = \ln x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$$

$$40. y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$$

4. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Нека се зададени функциите $f(x) = 2 \sin x$ и $g(x) = x^2 + 1$. Да ги формираме функциите $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ и $r(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2 \sin(x^2 + 1)$$

$$r(x) = g(f(x)) = g(2 \sin x) = (2 \sin x)^2 + 1 = 4 \sin^2 x + 1.$$

Функциите $h(x) = f(g(x))$ и $r(x) = g(f(x))$ се викаат сложени функции или композиција од $f(x)$ и $g(x)$.

Функцијата $y = \cos(x^3 + 2)$ може да ја разгледаме како сложена функција, која е добиена од функциите $f(x) = \cos x$ и $g(x) = x^3 + 2$, бидејќи $f(g(x)) = f(x^3 + 2) = \cos(x^3 + 2) = y$.

Ако функцијата $y = \cos(x^3 + 2)$, која е сложена ја запишеме со помош на функцијата $u(x) = x^3 + 2$, ќе добиеме $y = \cos(u)$. При овој начин на запишување функцијата $u(x)$ се нарекува **посредна (помошна) функција**.

Посредната функција $u(x)$ не е еднозначно определена.

Пример 1. Дадени се сложените функции. Да се определи посредната функција $u(x)$ и да се запише функцијата во облик $y = f(u)$:

$$\text{а) } y = \sqrt{x^2 + 2x} \quad \text{б) } y = e^{2x+1} \quad \text{в) } y = \ln(x^2 + 3x - 4) \quad \text{г) } y = (x^2 + 1)^9$$

Решение:

$$\text{а) За } y = \sqrt{x^2 + 2x}, \text{ имаме } u(x) = x^2 + 2x \text{ и } y = \sqrt{u},$$

$$\text{б) За } y = e^{2x+1}, \text{ имаме } u(x) = 2x + 1 \text{ и } y = e^u,$$

$$\text{в) За } y = \ln(x^2 + 3x - 4), \text{ имаме } u(x) = x^2 + 3x - 4 \text{ и } y = \ln(u),$$

$$\text{г) За } y = (x^2 + 1)^9, \text{ имаме } u(x) = x^2 + 1 \text{ и } y = u^9.$$

Нека $y = f(u(x))$ е сложена функција т.е. $y = f(u)$ и $u = u(x)$.

Ако постои извод $y' = f'(u)$ и $u' = u'(x)$, тогаш постои и извод на y по x , и притоа важи:

$$y' = (f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'$$

Правилото за пресметување на извод од сложена функција може да се докаже по дефиниција. Во овој дел нема да го докажеме тврдењето.

Пример 2. Да се најде извод на функцијата $y = (x^2 + 1)^9$.

Решение: Функцијата $y = (x^2 + 1)^9$ е сложена функција и со посредна функција $u = x^2 + 1$ се добива функција $y = (x^2 + 1)^9 = u^9$.

$$\begin{aligned}\text{Следува } y' &= ((x^2 + 1)^9)' = (u^9)' = 9u^8 \cdot u' = \\ &= 9(x^2 + 1)^8 (x^2 + 1)' = 9(x^2 + 1)^8 (2x + 0) = 18x(x^2 + 1)^9\end{aligned}$$

Пример 3. Да се најде извод на функцијата $y = e^{2x+1}$.

Решение: Функцијата $y = e^{2x+1}$ е сложена функција и со посредна функција $u = 2x + 1$ се добива функцијата $y = e^{2x+1} = e^u$.

$$\text{Следува, } y' = (e^{2x+1})' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{2x+1} (2x + 1)' = e^{2x+1} (2 \cdot 1 + 0) = 2e^{2x+1}$$

Пример 4. Да се најде извод на функцијата $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$.

Решение: Функцијата $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$ е сложена функција и со посредна функција $u = x^2 + 3x - 4$ се добива функцијата $y = \ln(x^2 + 3x - 4) = \ln u$.

$$\begin{aligned}\text{Следува, } y' &= (\ln(x^2 + 3x - 4))' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \cdot (x^2 + 3x - 4)' = \\ &= \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \cdot (2x + 3 - 0) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 4}\end{aligned}$$

Пример 5. Да се најде извод на функцијата $y = \sin(x^2)$.

Решение: Функцијата $y = \sin(x^2)$ е сложена функција и со посредна функција $u = x^2$ се добива функцијата $y = \sin(x^2) = \sin u$.

$$\text{Следува, } y' = (\sin(x^2))' = (\sin u)' = \cos u (u)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Пример 6. Да се најде извод на функцијата $y = \sin^2 x$.

Решение: Функцијата $y = \sin^2 x$ е сложена функција и со посредна функција $u = \sin x$ се добива функцијата $y = \sin^2 x = (\sin x)^2 = u^2$.

$$\begin{aligned}\text{Следува, } y' &= (\sin^2 x)' = (u^2)' = 2u (u)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \\ &= 2 \sin x \cos x = \sin 2x\end{aligned}$$

Во задачата користевме и тригонометриска формула за синус од удвоен агол.

Пример 6. Да се најде извод на функцијата $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Решение: Функцијата $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ е сложена функција и со посредна функција $u = \frac{1+x}{1-x}$ се добива функцијата $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln u$.

$$\begin{aligned} \text{Следува, } y' &= \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(0+1) \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (0-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{1-x} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

Ако го примениме правилот за извод од сложена функција на таблицата за елементарните функции, ќе добиеме нова таблица за извод на сложени функции.

Таблица на изводи од сложени функции:

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, за $a > 0$, $a \neq 1$.
4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, за $a > 0$, $a \neq 1$.
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Забелешка: Во оваа таблица посредната (помошната) променлива u е функција од x , $u = u(x)$

Пример 7. Да се најде извод на функцијата $y = \frac{1}{(3x^2 + 2)^7} = (3x^2 + 2)^{-7}$.

Решение: Функцијата $y = (3x^2 + 2)^{-7}$ е сложена функција, со посредна функција $u = 3x^2 + 2$. Се добива функцијата $y = \frac{1}{(3x^2 + 2)^7} = (3x^2 + 2)^{-7}$.

$$\begin{aligned}\text{Следува, } y' &= ((3x^2 + 2)^{-7})' = (u^{-7})' = (-7)u^{-8} \cdot u' = (-7)(3x^2 + 2)^{-8}(3x^2 + 2)' = \\ &= (-7)(3x^2 + 2)^{-8}(6x + 0)' = -42x(3x^2 + 2)^{-8} = -\frac{42x}{(3x^2 + 2)^8}\end{aligned}$$

Забелешка: При решавање на задачи за изводи од сложена функција, понатаму не мора да се користи замена со посредна функција, се внимава која е посредната функција и без да се запишува замената се пресметува изводот на сложената функција.

Пример 8. Да се најде извод на функцијата $y = e^{\cos x}$.

Решение: Функцијата $y = e^{\cos x}$ е сложена функција и со посредна функција $u = \cos x$. Сега нема да ја замениме посредната функција.

$$\text{Следува, } y' = (e^{\cos x})' = e^{\cos x}(\cos x)' = e^{\cos x}(-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x.$$

Пример 9. Да се најде извод на функцијата $y = e^{2x} \cos x$.

Решение:

$$\begin{aligned}y' &= (e^{2x} \cos x)' = (e^{2x})' \cos x + e^{2x} (\cos x)' = e^{2x} (2x)' \cos x - e^{2x} \sin x = \\ &= 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = e^{2x} (2 \cos x - \sin x)\end{aligned}$$

Пример 10. Да се најде извод на функцијата $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

Решение: Функцијата $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ е сложена функција, следува:

$$y' = \left(\ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' =$$

Бидејќи функцијата $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ е сложена, повторно го применуваме правилото за извод од сложена функција,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2 \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{(0-2x) \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot (0+2x)}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1+x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)} = -\frac{2x}{(1-x^2)(1+x^2)} = -\frac{2x}{1-x^4} = \frac{2x}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

Задачи за вежбање:

Користејќи го правилото за извод на сложена функција и правилата за извод од збир, разлика, производ и количник на функции најди ги изводите на следните функции:

1. $f(x) = (5x-7)^3$

2. $y = \sqrt{3x-5}$

3. $y = e^{x^2-2x+5}$

4. $y = \ln(2x-9)$

5. $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$

6. $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

7. $f(x) = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

8. $f(x) = x \sin x^4$

9. $y = \sin x^5$

10. $y = \sin^5 x$

11. $y = \cos^3 x \cdot \cos x^3$

12. $y = 1 - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$

$$13. y = \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^3$$

$$15. f(x) = \sin \sqrt{1+x^2}$$

$$17. y = \ln(\sin(x^2 - 2x + 2))$$

$$19. y = \ln \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2-4}}$$

$$21. f(x) = \sqrt[3]{x^2+6x-27}$$

$$23. y = (x+1)\sqrt{x^2+1}$$

$$25. y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$14. y = e^{tgx}$$

$$16. y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2-1)$$

$$18. y = \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} - \sqrt{x^2+1}$$

$$20. y = e^{\sin x}$$

$$22. y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$24. y = \frac{(x^2+1)^{10}}{5}$$

5. ЛОГАРИТАМСКИ ИЗВОДИ

Пример 1. Да го пресметаме изводот на функцијата $y = x^x$.

Изводот на функцијата $y = x^x$ не може да се пресмета со примена на претходните правила за диференцирање, бидејќи функцијата има променлива и во основата и во експонентот на степенот. За пресметување на изводот на функцијата ќе користиме постапка за логаритамско диференцирање.

Нека е дадена функцијата $y = f(x)^{g(x)}$, каде функциите $f(x)$ и $g(x)$ се позитивни и диференцијабилни. За да го пресметаме изводот на функцијата, прво ќе го логаритмираме равенството, а потоа ќе ги користиме својствата за логаритми за сродување на изразот.

$$y = f(x)^{g(x)} / \text{се логаритмира од двете страни}$$

$$\ln y = \ln(f(x)^{g(x)})$$

$$\ln y = g(x) \ln(f(x))$$

Сега може да побараме извод од двете страни, при што треба да внимаваме дека $y = y(x)$ е сложена функција од променлива x , а на десната страна ќе користиме извод од производ.

$$(\ln y)' = (g(x) \ln(f(x)))'$$

$$\frac{1}{y} y' = (g(x))' \ln(f(x)) + g(x) (\ln(f(x)))'$$

Од каде следува дека

$$y' = y \cdot ((g(x))' \ln(f(x)) + g(x) (\ln(f(x)))') \text{ т.е.}$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot ((g(x))' \ln(f(x)) + g(x) (\ln(f(x)))')$$

Постапката за определување извод на функцијата се нарекува **постапка за логаритамско диференцирање**.

Користејќи ја оваа постапка може да определиме извод од функцијата $y = x^x$.

Сега ја продолжуваме постапката за наоѓање извод на функцијата од пример 1:

Нека е дадена функцијата $y = x^x$, ако ја логаритмираме добиваме:

$$\ln y = \ln x^x$$

$\ln y = x \ln x$, со диференцирање на равенството добиваме:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (x)' \ln x + x (\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$$

$y' = y \cdot (\ln x + 1)$ со замена на почетната функција се добива решението на изводот

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Пример 2. Со логаритамско диференцирање да се најде изводот на функцијата

$$y = (\cos x)^{\sin x}.$$

Решение: Прво да ја логаритмираме функцијата $y = (\cos x)^{\sin x}$.

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x),$$

да го диференцираме равенството

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln(\cos x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot (\ln(\cos x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} (\cos x)' \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} (-\sin x) \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$y' = y \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$, и со замена на почетната функција добиваме дека

изводот на функцијата е:

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$$

Пример 3. Со логаритамско диференцирање да се најде изводот на функцијата

$$y = \sqrt[x]{1 + \frac{1}{x^3}}.$$

Решение: Функцијата $y = \sqrt[x]{1 + \frac{1}{x^3}}$, со користење својствата за степени може да ја

запишеме како $y = \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} \\
 \ln y &= \frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \\
 (\ln y)' &= \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)', \\
 \frac{1}{y} y' &= \left(\frac{1}{x} \right)' \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)', \\
 \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)' \right), \\
 \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{\frac{x^3 + 1}{x^3}} \cdot \left(-\frac{3}{x^4} \right) \right) \\
 \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) - \frac{3}{x^2(x^3 + 1)} \\
 y' &= y \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) - \frac{3}{x^2(x^3 + 1)} \right), \text{ следува} \\
 y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{3}{x^3 + 1} \right)
 \end{aligned}$$

Пример 4. Со логаритамско диференцирање да се најде изводот на функцијата

$$y = \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$$

Решение: Да го определиме изводот на функцијата $y = \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$ со логаритмирање.

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}} \\
 \ln y &= \frac{1}{x+3} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right), \text{ диференцираме и добиваме} \\
 (\ln y)' &= \left(\frac{1}{x+3} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) \right)',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} y' &= \left(\frac{1}{x+3} \right)' \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \left(\ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) \right)', \\
\frac{1}{y} y' &= \left(-1(x+3)^{-2}(x+3)' \right) \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \left(\frac{1}{\frac{x-5}{x+3}} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)' \right), \\
\frac{1}{y} y' &= \left(-\frac{1}{(x+3)^2} (1+0) \right) \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-5} \cdot \frac{(x-5)'(x+3) - (x-5)(x+3)'}{(x+3)^2}, \\
\frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x-5} \cdot \frac{x+3-x+5}{(x+3)^2}, \\
\frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{8}{(x-5)(x+3)^2}, \\
y' &= y \left(-\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{8}{(x-5)(x+3)^2} \right), \\
y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) - \frac{8}{x-5} \right)
\end{aligned}$$

Пример 5. Со логаритамско диференцирање да се најде изводот на функцијата

$$y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}.$$

Решение: Да ја логаритмираме функцијата $y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$.

$$\ln y = \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$$

$\ln y = \sin x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)$, сега може да се диференцира и добиваме:

$$(\ln y)' = \left(\sin x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \left(\ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \sin x \cdot \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{\sin x \cdot (1 - \ln x)}{x \ln x}$$

$$y' = y \left(\cos x \cdot \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{\sin x \cdot (1 - \ln x)}{x \ln x} \right), \text{ со замена на почетната функција се добива:}$$

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{\sin x (1 - \ln x)}{x \ln x} \right)$$

Постапката за определување извод на функцијата со логаритамско диференцирање може да се користи и кај функции кои се претставени со производ и количник на повеќе сложени функции и за да немаме премногу комплицирани изрази прво се логаритмира функцијата, а потоа се бара нејзиниот извод.

Пример 6. Со логаритамско диференцирање да се најде изводот на функцијата

$$y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}.$$

Решение: Да ја логаритмираме функцијата $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5},$

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+4)^{\frac{3}{5}}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y = \ln(x+4)^{\frac{3}{5}} - \ln(x-1)^2 - \ln(x+3)^5$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3), \text{ сега може да диференцираме}$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+4} (x+4)' - 2 \cdot \frac{1}{x-1} (x-1)' - 5 \cdot \frac{1}{x+3} (x+3)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}$$

$$y' = y \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5} \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

Задачи за вежбање:

Користејќи го правилото за логаритамско диференцирање да се пресмета изводот на следните функции:

$$1. y = \sqrt[x]{1 + \frac{1}{x^5}}$$

$$3. y = \sqrt[x]{1 + \frac{1}{x^7}}$$

$$5. y = (\sin x)^{\sin^2 x}$$

$$7. y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$9. y = \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^x$$

$$11. y = x^{x^x}$$

$$13. y = \frac{x+3}{(x-7)\sqrt[4]{(x+2)^3}}$$

$$15. y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1} \cos x}{\sin^3 x}$$

$$2. y = \left(\frac{x+7}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$4. y = \left(\frac{x+5}{x+4} \right)^{\frac{1}{x+4}}$$

$$6. y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$8. y = (\ln x)^x$$

$$10. y = x^{x+1}(x+1)$$

$$12. y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\cos x}$$

$$14. y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[4]{(x+3)^3}}$$

$$16. y = \sqrt{(x+1)^3} \cdot \frac{2x-1}{x+2} \cdot e^{x^2} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^3 x$$

6. ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ. ОДРЕДУВАЊЕ РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА ФУНКЦИЈА

ИЗВОД ОД ПОВИСОК РЕД

Нека е дадена диференцијабилна функција $y = f(x)$ за $x \in D_f$, т.е. постои изводот $y' = f'(x)$ на функцијата во точка од дефиниционата област.

Втор извод или извод од втор ред на функцијата $y = f(x)$ е извод од изводот на функцијата $y' = f'(x)$ и се означува со $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.

Поради оваа причина, изводот $y' = f'(x)$ се нарекува **прв извод** на функцијата $y = f(x)$.

Извод од вториот извод на $y'' = f''(x)$ на функцијата $y = f(x)$ се нарекува **трет извод** и се означува со $y''' = f'''(x) = (f''(x))'$.

Постапката може да се продолжи.

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ се нарекува **n -ти извод** на $y = f(x)$.

Функцијата $f(x)$ е n -диференцијабилна ако постои n -тиот извод во секоја точка од дефиниционата област.

Доколку n тежи кон бесконечност, велиме дека функцијата е бесконечно диференцијабилна.

Пример 1. Да се најде извод од:

а) втор ред на функцијата $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}$

б) трет ред на функцијата $y = 4x^2 - \sin x$

в) четврти ред на функцијата $y = \ln x$

Решение:

а) Да го определиме изводот од втор ред на $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}$. Прво треба да пресметаме извод од прв ред, а потоа извод од втор ред.

$$y' = \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4} \right)' = \frac{1}{12}(x^4)' - \frac{5}{6}(x^3)' + \left(\frac{1}{4} \right)' = \frac{1}{12} \cdot 4x^3 - \frac{5}{6} \cdot 3x^2 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right)' = \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x = x^2 - 5x$$

- б) Да го определиме изводот од трет ред на $y = 4x^2 - \sin x$. Треба да ги пресметаме редоследно сите изводи, извод од прв, извод од втор ред и на крај извод од трети ред.

$$y' = (4x^2 - \sin x)' = 4(x^2)' - (\sin x)' = 4 \cdot 2x - \cos x = 8x - \cos x$$

$$y'' = (8x - \cos x)' = 8(x)' - (\cos x)' = 8 \cdot 1 - (-\sin x) = 8 + \sin x$$

$$y''' = (8 + \sin x)' = (8)' + (\sin x)' = 0 + \cos x = \cos x$$

- в) За да го определиме изводот од четврти ред на функцијата $y = \ln x$, треба да ги пресметаме редоследно изводите од секој ред.

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2(x^{-3})' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА

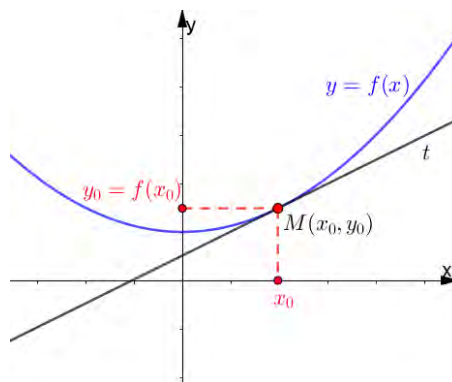
При дефинирање на поимот извод, видовме дека коефициентот на правец на тангентата на дадена функција $y = f(x)$ во точката $M(x_0, f(x_0))$ од кривата е еднаков на вредноста на изводот на функцијата во точката M , т.е. $k_t = f'(x_0)$.

Бидејќи равенката на права низ една точка $A(x_0, y_0)$ и коефициент на правец k се определува со $y - y_0 = k(x - x_0)$, следува дека **равенка на тангента** на диференцијабилната функција $y = f(x)$ во точка $M(x_0, f(x_0))$, каде $y_0 = f(x_0)$ и $k = k_t = f'(x_0)$ е

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Равенка на тангента на графикот на функција $y = f(x)$ која е диференцијабилна во точката $M(x_0, y_0)$ е

$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$



Пример 1. Да се запише равенката на тангентата на кривата $f(x) = 5x - x^2$ во точка M со апсциса $x = 1$.

Решение: Најпрво ги определуваме координатите на допирната точка $M(x_0, y_0)$. Од условот на задачата $x_0 = 1$ и $y_0 = f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$.

Следува, допирната точка е $M(1, 4)$.

Изводот во произволна точка x е:

$$f'(x) = (5x - x^2)' = 5(x)' - (x^2)' = 5 \cdot 1 - 2x = 5 - 2x.$$

Коефициентот на правецот на тангентата во точката $M(1, 4)$ е $k_t = f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$.

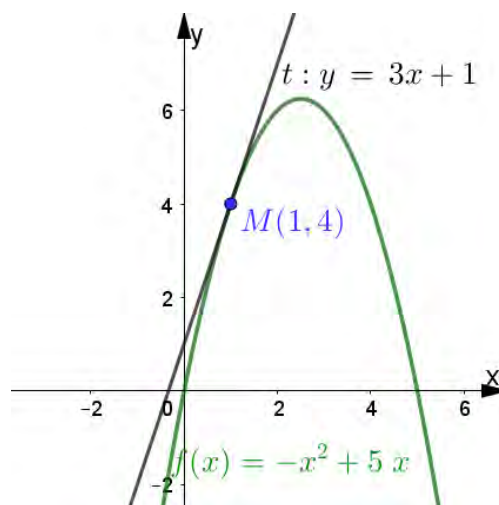
Заменувајќи ги вредностите на $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ и $f'(x_0) = 3$ во равенката на тангента t , добиваме:

$$y - 4 = 3(x - 1)$$

$$y - 4 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 + 4, \text{ т.е.}$$

$$y = 3x + 1 \text{ е равенка на тангента}$$



Пример 2. Во која точка од кривата $y = x^3 + 2x^2 - 1$ тангентата има коефициент на правец 4?

Решение: Од услов на задачата $k_t = 4$.

Треба да ги определиме координатите на допирната точка $M(x_0, y_0)$.

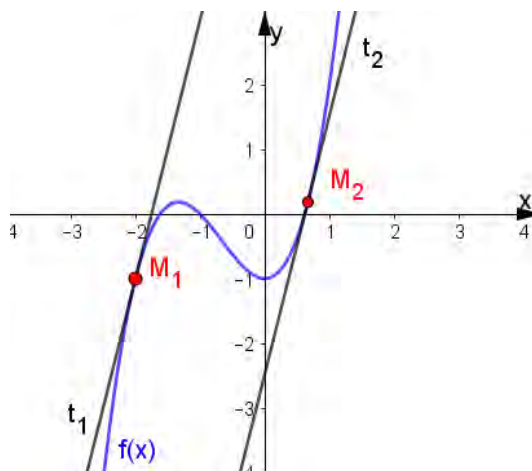
Апсцисата x_0 на допирната точка ќе ја определиме од условот $k_t = f'(x_0)$.

Изводот на функцијата е

$$y' = (x^3 + 2x^2 - 1)' = 3x^2 + 4x, \text{ а во } x_0$$

е $f'(x_0) = 3x_0^2 + 4x_0$ и го добиваме равенството

$$4 = 3x_0^2 + 4x_0, \text{ т.е. } 3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0.$$



Ја решаваме добиената квадратната равенка,

$$x_{0_{1/2}} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 8}{6}, \text{ за која добиваме } x_{0_1} = -2 \text{ и } x_{0_2} = \frac{2}{3}.$$

Сега може да ги одредиме и координатите y_0 .

1) $y_{0_1} = f(x_{0_1}) = f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1 = -1$, т.е. бараната точка е $M_1(-2, -1)$. Равенката на тангента е $y - (-1) = 4(x - (-2))$, или средена равенката на тангента t_1 е $y = 4x + 7$.

2) $y_{0_2} = f(x_{0_2}) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - 1 = \frac{5}{27}$, т.е. бараната точка е $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{27}\right)$.

Равенката на тангента $y - \frac{5}{27} = 4\left(x - \frac{2}{3}\right)$, или равенката на тангентата е

$$t_2: y = 4x - \frac{67}{27}, \text{ т.е. во општ облик е } 108x - 27y - 67 = 0.$$

Забелешка: Двете тангенти се паралелни помеѓу себе, бидејќи имаат ист коефициент на правец $k_t = 4$.

При решавање на задачите може да изработиме прво аплет за равенка на тангента и потоа со анимации да дојдеме до решението, кое алгебарски треба да го пресметаме.

Пример 3. Да се најде равенка на тангента на кривата $y = -x^2 + x + 2$ која е паралелна со симетралата на прв и трет квадрант.

Решение: Прво имаме изработено аплет во Геогедра во кој со проба учениците може да дојдат до решението. Во произволна точка од кривата конструираме тангента и потоа со движење на точката проверуваме кога тангентата ќе биде паралелна со дадената права $y = x$.



<https://www.geogebra.org/m/kwsj9c6n>

Од услов на задачата, бидејќи тангентата треба да биде паралелна со симетралата на прв и трет квадрант $y = x$ се добива $k_t = 1$.

Треба да ги определиме координатите на допирната точка $A(x_0, y_0)$.

Апсцисата x_0 на допирната точка ќе ја определиме од условот $k_t = f'(x_0)$.

Изводот на функцијата е $y' = (-x^2 + x + 2)' = -2x + 1$, а во x_0 е $f'(x_0) = -2x_0 + 1$ и го добиваме равенството

$$1 = -2x_0 + 1, \text{ т.е. } x_0 = 0.$$

Сега може да ја одредиме и координатата y_0 .

$y_0 = f(x_0) = f(0) = -0^2 + 0 + 2 = 2$, т.е. бараната точка е $A(0, 2)$. Равенката на тангента е $y - 2 = 1 \cdot (x - 0)$, или средена равенката на тангента t : $y = x + 2$. Со што го потврдиме и решението добиено со аплетот.

Пример 4. Да се најде равенка на тангента на кривата $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ која е нормална на правата $p: x + 3y - 4 = 0$.

Решение: Од условот за нормалност на две прави следува дека $k_t \cdot k_p = -1$ т.е. $k_t = -\frac{1}{k_p}$.

Коефициентот на правата p , ќе го добиеме со трансформација на правата $p: x + 3y - 4 = 0$.

Следува,

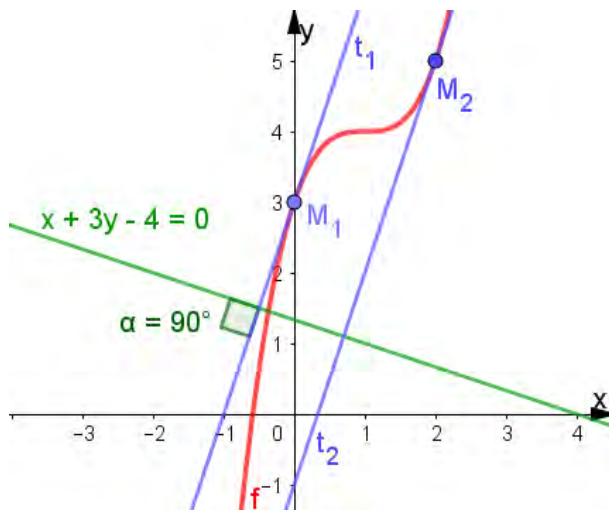
$$3y = -x + 4 \text{ т.е. } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3},$$

Коефициентот на правецот на правата е

$$k_p = -\frac{1}{3}, \text{ а}$$

коефициентот на правецот на тангентата

$$\text{е } k_t = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$



Допирната точка $M(x_0, y_0)$ ќе ја определиме на истиот начин како во претходниот пример.

Апсцисата x_0 на допирната точка ќе ја определиме од условот $k_t = f'(x_0)$.

Изводот на функцијата е $y' = (x^3 - 3x^2 + 3x + 3)' = 3x^2 - 6x + 3$, а во x_0 е $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$ и го добиваме равенството $3 = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$, т.е. $3x_0^2 - 6x_0 = 0$.

Со трансформација $3x_0(x_0 - 2) = 0$ ги добиваме решенијата на равенката $x_{0_1} = 0$ и $x_{0_2} = 2$. Добивме две решенија, т.е. две точки во кој тангентите ќе бидат нормални на дадената права.

Сега може да ги одредиме и координатите y_0 .

1) $y_{0_1} = f(x_{0_1}) = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 = 3$, т.е. бараната точка е $M_1(0, 3)$. Равенката на тангента е $y - 3 = 3(x - 0)$, или средена равенката на тангента $t_1: y = 3x + 3$.

2) $y_{0_2} = f(x_{0_2}) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 5$, т.е. бараната точка е $M_2(2, 5)$. Равенката на тангента е $y - 5 = 3(x - 2)$, или средена равенката на тангента $t_2: y = 3x - 1$.

РАВЕНКА НА НОРМАЛА

Нека е дадена функција $y = f(x)$ и точка $M(x_0, f(x_0))$ од функцијата.

Правата која минува низ точката $M(x_0, f(x_0))$ и е нормална на тангентата на кривата во таа точка се нарекува **нормала на кривата** $y = f(x)$ во точка M .

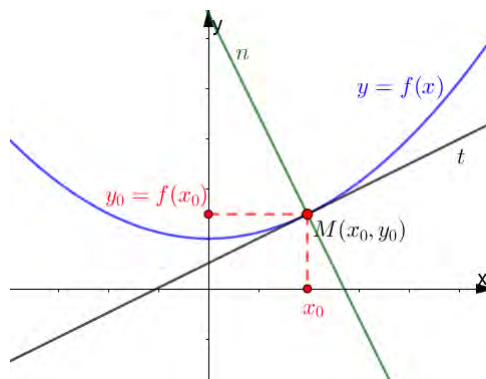
Коефициентот на правецот на нормалата $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$, следува дека равенката на нормала на диференцијабилната функција $y = f(x)$ во точка $M(x_0, y_0)$ е:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

На цртежот е претставено графички,

Равенка на нормалата на графикот на функција $y = f(x)$ која е дифенцијабилна во точката M со координати x_0 и $y_0 = f(x_0)$ е

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



Пример 1. Да се запише равенка на нормала на кривата $f(x) = 5x - x^2$ во точка M со апсциса $x = 1$.

Решение: Најпрво ги определуваме координатите на точка $M(x_0, y_0)$. Од условот на задачата $x_0 = 1$, и $y_0 = f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$.

Следува дека, точката $M(1, 4)$ е точка од функцијата

Изводот во произволна точка x е:

$$f'(x) = (5x - x^2)' = 5(x)' - (x^2)' = 5 \cdot 1 - 2x = 5 - 2x$$

Изводот во точката $M(1, 4)$ е $f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$.

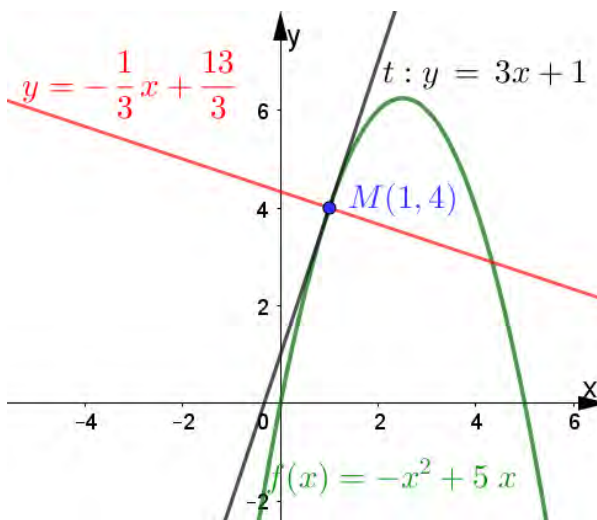
Заменувајќи ги вредностите $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ и $f'(x_0) = 3$ во равенката на нормалата n , добиваме:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 4, \text{ т.е.}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \text{ е равенка на нормала.}$$



Забелешка: Нормалата $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ во точката $M(1, 4)$ на функцијата $f(x) = 5x - x^2$ е нормална на тангентата $y = 3x + 1$ во истата точката $M(1, 4)$.

Пример 2. Да се определи равенка на тангента и нормала на кривата $y = \frac{8}{4 + x^2}$ во точка со апсциса $x_0 = 2$.

Решение: За $x_0 = 2$ добиваме:

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{8}{4 + 2^2} = \frac{8}{8} = 1, \text{ т.е. точка } M(2, 1).$$

Да го определиме изводот на функцијата,

$$y' = \left(\frac{8}{4 + x^2} \right)' = 8 \left((4 + x^2)^{-1} \right)' = 8 \cdot (-1) \cdot (4 + x^2)^{-2} \cdot (2x) = -\frac{16x}{(4 + x^2)^2}.$$

Потоа го бараме изводот на функцијата во точка $x_0 = 2$, т.е.

$$f'(x_0) = f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4 + 2^2)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}.$$

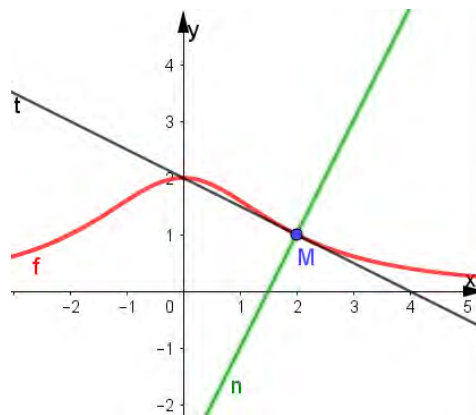
Равенка на тангента во точка $M(2,1)$ е:

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2), \text{ т.е. } y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

И равенка на нормала е:

$$y-1 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x-2), \text{ т.е. } y = 2x-3.$$

На цртежот графички е претставена функцијата со тангентата и нормалата.



Пример 3. Да се определи равенка на тангента и нормала на кривата $f(x) = 2x^2 - 3x$ во точка со апсциса $x_0 = 1$.

Решение: Ако во функцијата $f(x) = 2x^2 - 3x$, замениме $x_0 = 1$ добиваме $f(1) = 2 - 3 = -1$.

Да го определиме изводот $f'(x) = 4x - 3$, и ако замениме $x_0 = 1$, добиваме $y'_0 = f'(1) = 4 - 3 = 1$.

Со замена во формулата за равенка на тангента добиваме $y - (-1) = (x - 1)$, и со средување t : $y = x - 2$.

Со замена во равенката на нормала добиваме $y - (-1) = -\frac{1}{1}(x - 1)$, и со средување добиваме n : $y = -x$

Задачи за вежбање:

1. Напиши равенка на тангента на функцијата $y = \frac{1}{x^2}$ во точка со апсциса $x = 1$.
2. Да се одреди тангентната на кривата $y = \sqrt{x}$ која со позитивниот дел на x -оска зафаќа агол од 45° .
3. Да се најде равенката на тангента на кривата $y = x^2 + x$ која е нормална на правата $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
4. Во кои точки од кривата $y = -x^2 + x + 2$ тангентата е паралелна со:
 - а) x -оската
 - б) симетралата на прв и трет квадрант.

5. Напиши равенка на нормала на кривата $y = x^2 + 5x - 1$ во точка со апсциса $x = 1$
6. Напиши равенка на тангента и нормала на функција $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ во точките:
- а) $A(2, 3)$
 - б) $B(-1, 0)$
 - в) $C(3, 0)$
7. Определи ја равенката на нормалата на кривата $y = x \ln x$ која е паралелна со правата $y = x + 5$.
8. Да се најде коефициентот на правецот на тангентата и нормалата на кривата $y = x^2 + 2x + 5$:
- а) во точка со апсциса $x = 1$,
 - б) во точка со ордината $y = \frac{13}{2}$.
9. Во кои точки тангентата на кривата $y = \ln x$ е:
- а) нормална на правата $y = -2x + 1$,
 - б) паралелна со правата $2x - y - 1 = 0$.
10. Да се најдат точките со исти апсциси во кои тангентите на кривите $y = 3x^2 - 4x + 1$ и $y = x^3 - x - 1$ се паралелни.

7. ПРИМЕНА НА ИЗВОД ВО ФИЗИКА

Ако кажеме дека растојанието од Велес до Скопје е поминато со брзина од 80km/h , во тој случај се „подразбира“ со која средна брзина се движел автомобилот.

Во продолжение ќе разгледаме некои примери од физика.

Ако со s го означиме изминатиот пат на материјалната точка M по правата p , тогаш положбата на точката M во секој момент од времето t е определена со функцијата $s = f(t)$, која во физиката е позната како **закон за движење на телата**.

Во моментот t точката се наоѓа во положбата M_0 , и изминатиот пат е $s_0 = f(t)$. Со промена на времето во $t + \Delta t$, точката M_0 ќе се најде во положбата M_1 и изминатиот пат е $s_1 = f(t + \Delta t)$. Добивме, дека во временскиот интервал Δt точката M го поминала патот $\Delta s = s_1 - s_0$ или $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$.



Брзината на материјалната точка е определена со формулата $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, позната како средна брзина на подвижна точка (тело) и се означува со v_{sr} .

При рамномерно движење количникот $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, односно средната брзина на материјалната точка е константна.

Кога движењето на материјалната точка не е рамномерно, тогаш брзината се менува во секој момент. Ако нараснувањето на времето Δt е доволно мало, тогаш во моментот t соодветната средна брзина ќе биде доволно блиску до моменталната (вистинската) брзина на телото, која се нарекува **моментална брзина** v .

Според законот за движење $s = f(t)$, моменталната брзина v во времето t е гранична вредност на средната брзина, ако постои кога $\Delta t \rightarrow 0$, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Добивме дека моменталната брзина на материјалната точка (телото) што се движи по закон $s = f(t)$ е еднаква на вредноста на изводот на функцијата $f(t)$ по променлива t во момент t_0 , т.е. $v = f'(t_0)$.

Нека t е времето во кое е определена моменталната брзина $v = f'(t)$. Промената на брзината за одредена промена на времето Δt , може да ја определиме $\Delta v = f'(t + \Delta t) - f'(t)$.

Од физика, познато е дека количникот $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ го дава средното забрзување на материјалната точка во интервалот $[t, t + \Delta t]$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ е моменталното забрзување означено со a во момент t , т.е. $a = v' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t)$.

Добивме дека забрзувањето на материјалната точка (телото) што се движи по закон $s = f(t)$ е еднаква на вредноста на вториот изводот на функцијата $f(t)$ по променлива t во момент t_0 , т.е. $a = f''(t_0)$.

Пример 1. Едно тело се движи праволински со закон $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2t$, каде S се мери во метри, а t во секунди. Најди ја брзината и забрзувањето на телото на крајот од третата секунда $t = 3s$.

Решение: Од условот на задачата $t = 3s$.

Да ги определиме изводите на функцијата и да ја замениме вредноста на t .

Првиот извод е $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 2$ и со замена на вредноста на t добиваме $v(3) = s'(3) = 27 - 36 + 2 = -7$, т.е. $v = -7 \text{ m/s}$.

Вториот извод е $a(t) = v'(t) = 6t - 12$ и со замена на вредноста на t добиваме $a(3) = v'(3) = 18 - 12 = 6$, т.е. $a = 6 \text{ m/s}^2$.

Пример 2. Познато е дека изминатиот пат при слободно паѓање на телото се наоѓа по формулата $s = \frac{1}{2}gt^2$, каде што $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ е земјиното забрзување. Да се определи брзината и забрзувањето на телото при слободно паѓање во времето $t = 5s$.

Решение: Првите два изводи на функцијата се: $s' = gt$ и $s'' = g$.

Во време $t = 5s$, брзината ќе биде $v(5) = s'(5) = g \cdot 5 = 9.81 \cdot 5 = 49.05 \text{ m/s}$, што значи дека на крајот од петтата секунда брзината на телото ќе биде 49.05 m/s .

Во време $t = 5s$, забрзувањето ќе биде $a(5) = s''(5) = g = 9.81 \text{ m/s}^2$, што значи дека забрзувањето при слободно паѓање секогаш е константно и изнесува 9.81 m/s^2 .

Задачи за вежбање:

- Едно тело се движи праволински со закон $s(t) = 4t^3 - 4t^2 + 5$. Најди ја брзината и забрзувањето на телото во времето: а) $t = 2s$, б) $t = 10s$

- 210

8. ПРИМЕНА НА ИЗВОД. ИСПИТУВАЊЕ ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

ИСПИТУВАЊЕ МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Со поимот монотоност на функција, т.е. растење и опаѓање на функција се запознаваме во втората модуларна единица.

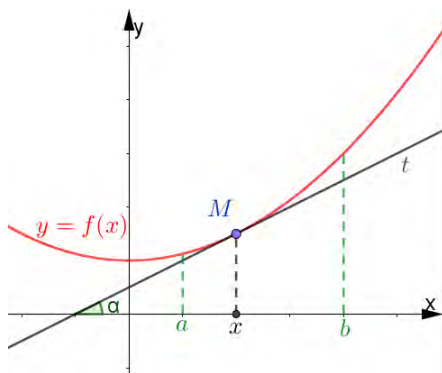
Да се потсетиме на дефиницијата за монотоност.

Дефиниција. За функцијата $f(x)$ со дефинициона област D_f и интервал (a, b) кој припаѓа на дефиниционата област, велíme дека:

- е строго **монотono растечка** на интервалот (a, b) , ако за било кои $x_1, x_2 \in (a, b)$ такви што $x_1 < x_2$, важи $f(x_1) < f(x_2)$,
- е строго **монотono опаѓачка** на интервалот (a, b) , ако за било кои $x_1, x_2 \in (a, b)$ такви што $x_1 < x_2$, важи $f(x_1) > f(x_2)$.

Сега ќе видиме како со помош на извод на функција може да ја испитаеме монотоноста на функцијата.

Нека функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$ се дадени во интервалите (a, b) и (c, d) соодветно.



Гледаме дека тангентата во точката M на кривата $y = f(x)$ што е график на функцијата која е растечка на интервалот (a, b) зафаќа остар агол α со позитивниот дел на x -оската, т.е. $\tan \alpha > 0$.

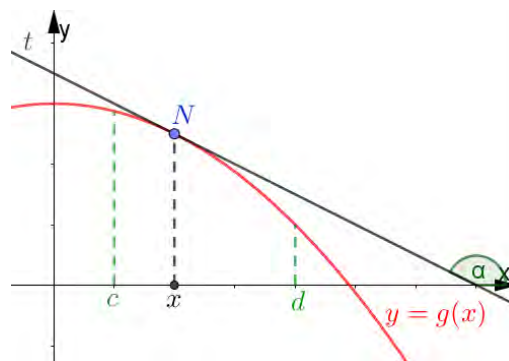
Од дефиницијата за коефициентот на правец на тангентата следува дека за секој $x \in (a, b)$,

$$f'(x) = k_t = \tan \alpha > 0.$$

Тангентата во точката N на кривата $y = g(x)$ што е график на функција која е опаѓачка на интервалот (c, d) зафаќа тап агол α со позитивниот дел на x -оската, т.е. $\tan \alpha < 0$.

Од дефиницијата за коефициентот на правец на тангентата следува дека за секој $x \in (c, d)$,

$$g'(x) = k_t = \tan \alpha < 0.$$



Сега, може да ја искажеме следната дефиниција:

Дефиниција. Функцијата $y = f(x)$ која е диференцијабилна во секоја точка од интервалот (a, b) ,

- строго **монотono расте** на интервалот ако и само ако $f'(x) > 0$ за секој $x \in (a, b)$
- строго **монотono опаѓа** на интервалот ако и само ако $f'(x) < 0$ за секој $x \in (a, b)$
- е константна ако и само ако $f'(x) = 0$ за секој $x \in (a, b)$.

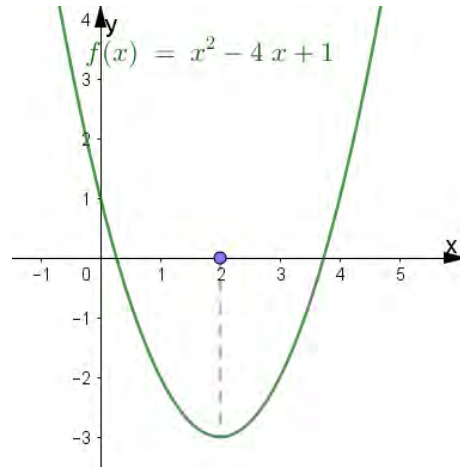
Пример 1. Да се испита монотоноста на функцијата $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Решение: Дефиниционата област на функцијата $f(x) = x^2 - 4x + 1$ е $D_f = \mathbb{R}$. Го одредуваме изводот на функцијата, $f'(x) = 2x - 4$.

За да го определиме интервалот во кој функцијата е растечка ја решаваме неравенката $f'(x) > 0$, следува $2x - 4 > 0$, од каде следува дека $x > 2$, т.е. $x \in (2, +\infty)$.

За да го определиме интервалот во кој функцијата е опаѓачка ја решаваме неравенката $f'(x) < 0$, т.е. $2x - 4 < 0$, од каде следува дека $x < 2$, т.е. $x \in (-\infty, 2)$.

Значи, функцијата **расте** за $x \in (2, +\infty)$ и **опаѓа** за $x \in (-\infty, 2)$.



Пример 2. Да се испита монотоноста на функцијата $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Решение: Дефиниционата област на функцијата $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ е $D_f = \mathbb{R}$. Изводот на функцијата, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

За да го определиме интервалот во кој функцијата е растечка ја решаваме неравенката $f'(x) > 0$, од каде следува дека $3x^2 - 12x + 9 > 0$.

Решение на равенката $3x^2 - 12x + 9 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Користејќи постапка за разложување на квадратен трином ја добиваме неравенката $3(x-1)(x-3) > 0$.

Знакот на изразите $x-1$ и $x-3$ е:

$x-1 > 0$ (изразот е позитивен), за $x > 1$ и $x-1 < 0$ (изразот е негативен), за $x < 1$

$x-3 > 0$, за $x > 3$ и $x-3 < 0$, за $x < 3$.

Резултатите може да ги внесеме во помошна табела и да определиме знакот на првиот извод. Во колоната на секој од интервалите во кои изразот е позитивен запишуваме „+“, а кај интервалите каде изразот е негативен запишуваме „-“.

xx	$-\infty$	1	3	$+\infty$
интервал	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$	
$x-1$	-	+	+	
$x-3$	-	-	+	
$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$	+	-	+	
Монотоност	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Знакот на изводот $f'(x)$ во табелата се добива со множење на знаците на множителите $x-1$ и $x-3$. Бидејќи 3 е позитивен број не го менува знакот на производот.

Во зависност од знакот на $f'(x)$ добиваме дека:

ако знакот е „+“, т.е $f'(x) > 0$, тогаш добиваме интервал во кој расте функцијата,

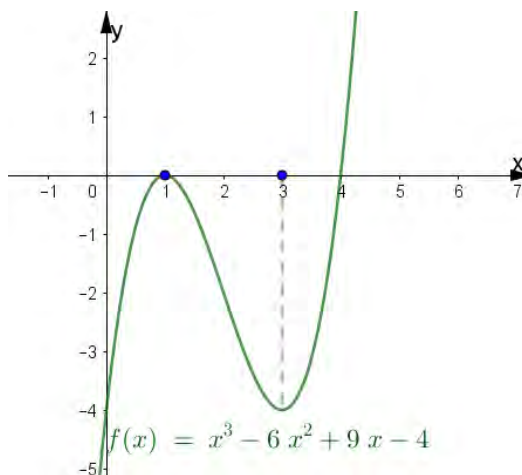
ако знакот е „-“ т.е $f'(x) < 0$, тогаш добиваме интервал во кој опаѓа функцијата.

Од табелата може да прочитаеме дека:

Функцијата $y = f(x)$ монотонно расте на интервалот $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$,

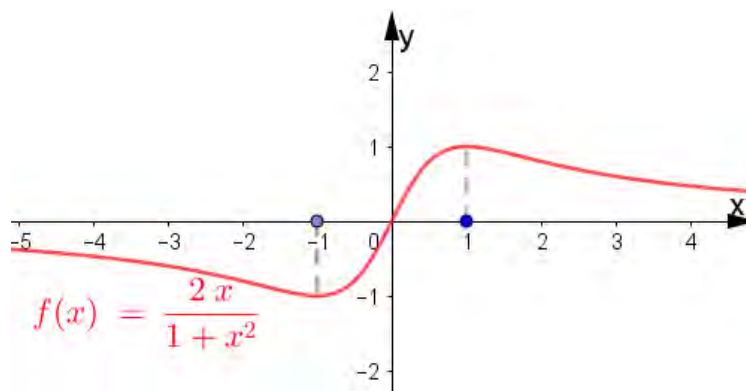
Функцијата $y = f(x)$ монотонно опаѓа на интервалот $(1, 3)$.

На цртежот графички е претставена функцијата со интервалите на монотоност.



Пример 3. Да се испита монотоност на функцијата $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение: На цртежот графички е претставена функцијата.



Функцијата $y = f(x)$ монотонно расте на интервалот $(-1, 1)$,

Функцијата $y = f(x)$ монотонно опаѓа на интервалот $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Задачи за вежбање:

1. Најди ги интервалите во кои функциите растат, односно опаѓаат:

а) $f(x) = 1 - x^2$

б) $f(x) = (x - 3)^2$

в) $f(x) = x^2 - 2x$

г) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

2. Најди ги интервалите во кои функциите растат, односно опаѓаат:

а) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 7$

б) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$

в) $f(x) = x^4 - 8x^2$

г) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

3. Најди ги интервалите во кои функциите растат, односно опаѓаат:

а) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

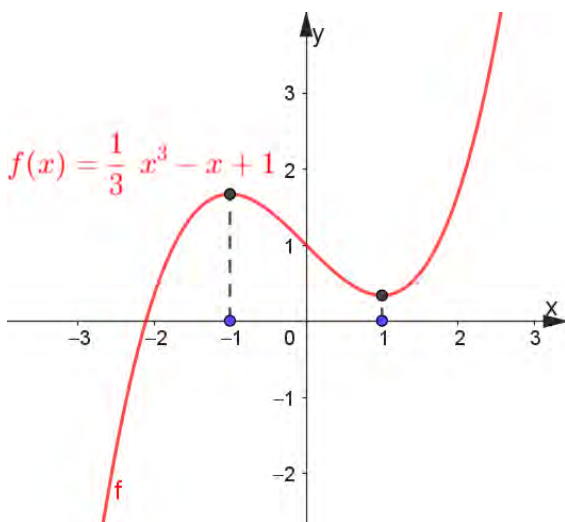
б) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$

$$\text{в)} f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1}$$

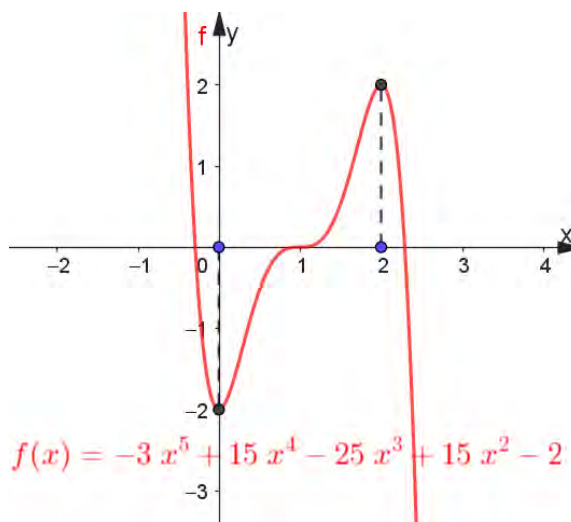
$$\text{г)} f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$$

4. Запиши ги интервалите на монотоност директно од графикот на дадените функции:

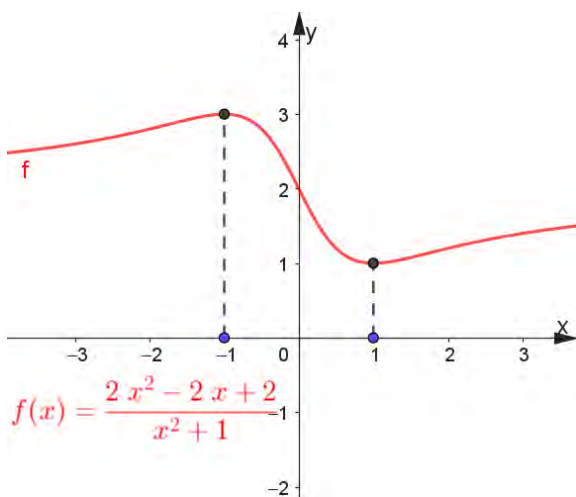
$$\text{а)} f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$



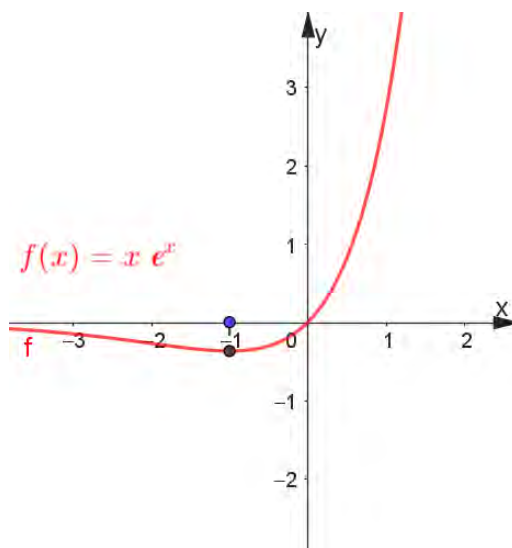
$$\text{б)} f(x) = -3x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 15x^2 - 2$$



$$\text{в)} f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$$



$$\text{г)} f(x) = xe^x$$



ИСПИТУВАЊЕ ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈА

Нека е дадена функцијата $y = f(x)$ која е дефинирана на интервалот (a, b) . Точките од графикот на функцијата во кои се менува монотоноста на функцијата се викаат **екстремни вредности** или **екстремии на функцијата**.

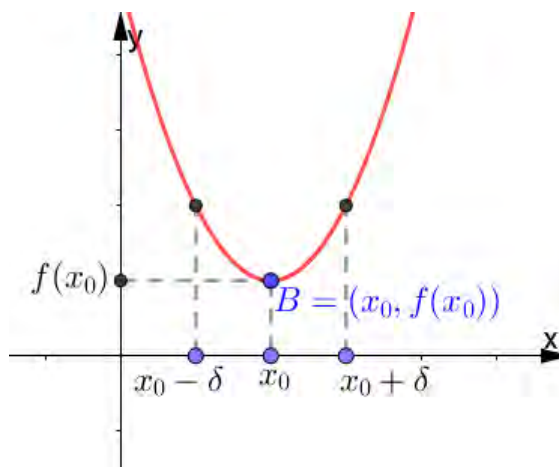
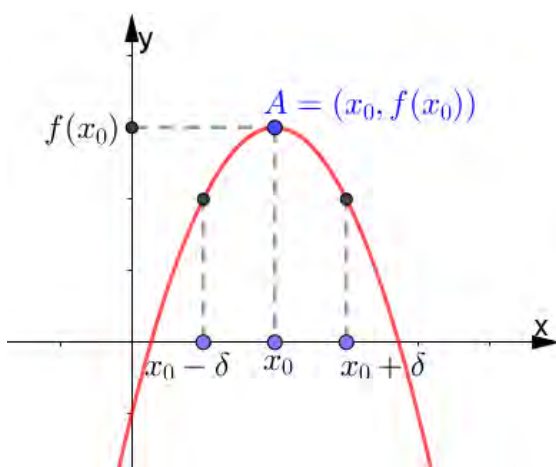
Во тие точки функцијата достигнува најголема (најмала) вредност, но локално, само во околина на тие точки.

Дефиниција. Функцијата $y = f(x)$ во точката $x = x_0$ и $x_0 \in (a, b)$ има **локален екстрем** еднаков на $f(x_0)$, ако постои δ - околина на точката x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, така што за секој x од оваа околина е исполнето:

$f(x_0) \geq f(x)$, тогаш во точката $(x_0, f(x_0))$ има **локален максимум**,

$f(x_0) \leq f(x)$, тогаш во точката $(x_0, f(x_0))$ има **локален минимум**.

На цртежот се претставени екстремите на графиките на функции.



Овие екстремии се од локален карактер, бидејќи функцијата не ја достигнува својата најголемата и најмалата вредност во целата дефиницопна област. Тоа се точки во кој се менува текот на функцијата, од растење во опаѓање и обратно.

Во наредните примери ќе разгледаме својство на изводот на функцијата во околина на точката x_0 и во точката x_0 во која ќе имаме екстремна вредност.

Пример 1. Одреди ги екстремните вредности на функцијата $f(x) = -x^2 + 4x$.

Решение: Да го одредиме изводот на функцијата, $f'(x) = -2x + 4$.

$f'(x) > 0$, ако $-2x + 4 > 0$, т.е $x < 2$. Следува дека за $x \in (-\infty, 2)$ функцијата расте.

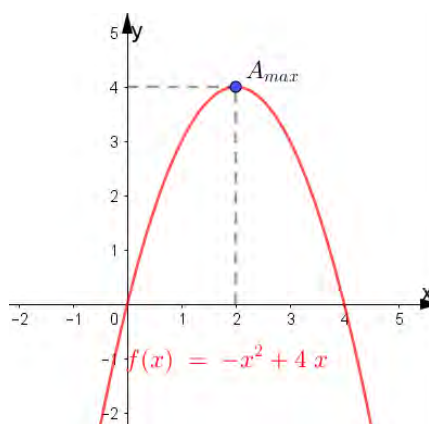
$f'(x) < 0$, ако $-2x + 4 < 0$, т.е $x > 2$. Следува дека за $x \in (2, +\infty)$ функцијата опаѓа.

За $x = 2$, $f'(2) = 0$.

Значи, кога аргументот x преминува преку точката $x_0 = 2$, првиот извод го менува знакот од позитивен во негативен, па функцијата има максимум во $x_0 = 2$, кој изнесува

$$y_{\max} = f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4, \text{ т.е}$$

во точка $A = (2, 4)$ функцијата има максимум $A_{\max}$



Пример 2. Одреди ги екстремните вредности на функцијата $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Решение: Да го одредиме изводот на функцијата, $f'(x) = 2x - 4$.

$f'(x) > 0$, ако $2x - 4 > 0$, т.е $x > 2$. Следува дека за $x \in (2, +\infty)$ функцијата расте.

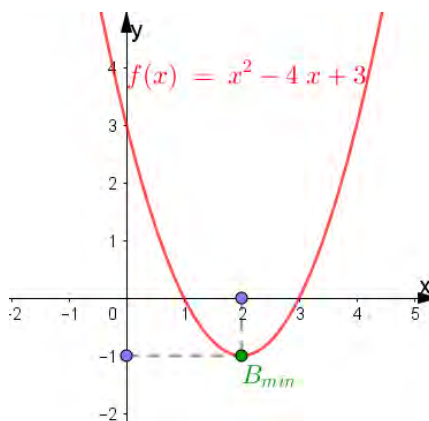
$f'(x) < 0$, ако $2x - 4 < 0$, т.е $x < 2$. Следува дека за $x \in (-\infty, 2)$ функцијата опаѓа.

За $x = 2$, $f'(2) = 0$.

Значи, кога аргументот x преминува преку точката $x_0 = 2$, првиот извод го менува знакот од негативен во позитивен, па функцијата има минимум во $x_0 = 2$, кој изнесува

$$y_{\min} = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1, \text{ т.е.}$$

во точка $B = (2, -1)$ функцијата има минимум $B_{\min}$



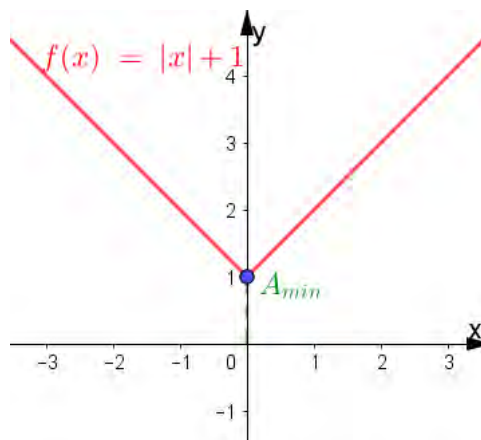
Забелешка: Ако функцијата $y = f(x)$ има екстрем во точката x_0 , тогаш или $f'(x_0) = 0$ или не постои.

Пример 3. Да се определи екстремот на функцијата $f(x) = |x| + 1$.

Решение: Графикот на функцијата е претставен од десно.

Функцијата во интервалот $(-\infty, 0)$ опаѓа, а во интервалот $(0, +\infty)$ расте. За $x = 0$, вредноста на функцијата е $f(0) = 1$. Функцијата има минимум во точка $A = (0, 1)$.

Но функцијата не е диференцијабилна во точката $x = 0$, бидејќи од лево $f'(0) = -1$, а од десно $f'(0) = 1$.



Забелешка: Во продолжение ќе разгледуваме примери во кој функцијата е диференцијабилна во точката во која има екстрем.

Врз основа на претходните примери може да дефинираме постапка со која ги определуваме екстремите на функцијата $y = f(x)$.

Постапка за одредување на **екстрем** на функцијата $y = f(x)$

- 1) Се определува првиот извод $f'(x)$, се решава равенката $f'(x) = 0$ и се наоѓаат решенијата $x = x_i$, за $i = 1, 2, 3, \dots$ ако постојат. Се определуваат точките $(x_i, f(x_i))$, кои се стационарни точки и можни екстреми.
- 2) Го испитуваме знакот на $f'(x)$ во околина на точката $x = x_i$, и притоа:
 - Ако знакот на $f'(x)$ се менува од $f'(x) < 0$ (од негативен), во $f'(x) > 0$ (во позитивен), тогаш функцијата $f(x)$ има минимум во точката $(x_i, f(x_i))$,
 - Ако знакот на $f'(x)$ се менува од $f'(x) > 0$ (од позитивен), во $f'(x) < 0$ (во негативен), тогаш функцијата $f(x)$ има максимум во точката $(x_i, f(x_i))$,
 - Ако знакот на $f'(x)$ не се менува, тогаш функцијата $f(x)$ нема екстрем во точката $(x_i, f(x_i))$.

Пример 4. Да се најдат екстремите на функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Решение: Првиот извод на функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 3$ е $f'(x) = 2x - 2$. Потоа го изедначуваме првиот извод на нула $2x - 2 = 0$ и ја наоѓаме апсцисата на стационарната точка $2x = 2$, т.е. $x = 1$.

Ја наоѓаме ординатата на стационарната точка

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$

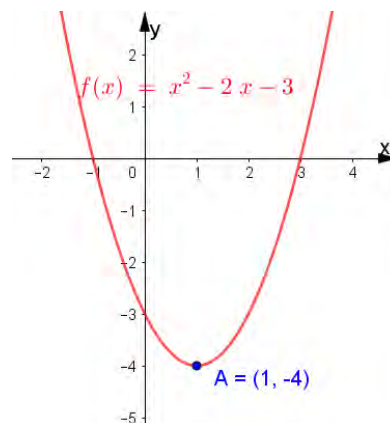
Тое е точката $A(1, -4)$.

За да определиме дали во точката A функцијата има екстрем го испитуваме знакот на првиот извод во интервалите $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

За $x \in (-\infty, 1)$, првиот извод $f'(x) < 0$, па функцијата опаѓа.

За $x \in (1, +\infty)$, првиот извод $f'(x) > 0$, па функцијата расте.

Следува во точка $A(1, -4)$ функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 3$ има минимум.



Пример 5. Да се определи екстремот на функцијата $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

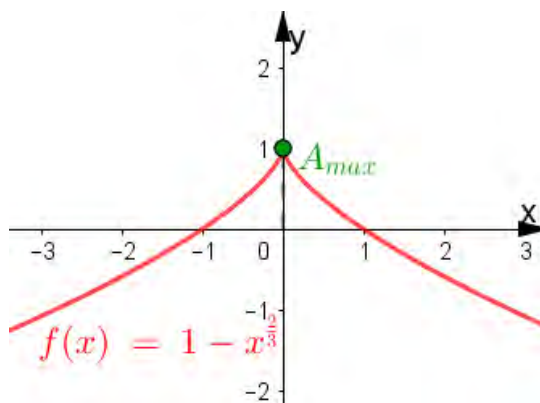
Решение: Го наоѓаме првиот извод на функцијата $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, кој е $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Го изедначуваме првиот извод на нула $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$, т.е. $-2 = 0$ равенката нема решение. Но првиот извод не постои за $x = 0$, а вредноста на функцијата е $f(0) = 1 - \sqrt[3]{0^2} = 1$. Добивме точка $A(0, 1)$.

За да определиме дали во точката A функцијата има екстрем го испитуваме знакот на првиот извод во интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

За $x \in (-\infty, 0)$, првиот извод $f'(x) > 0$, т.е. функцијата расте.

За $x \in (0, +\infty)$, првиот извод $f'(x) < 0$, т.е. функцијата опаѓа.

Следува во точка $A(0, 1)$ функцијата $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ има максимум.



Забелешка: Во примерите 3 и 5 функцијата не е диференцијабилна во точката во која има екстрем.

Ако функцијата $y = f(x)$ е два пати диференцијабилна во точка x_0 , тогаш постапката за одредување на екстремни вредности може да се реализира и со употреба на втор извод.

Нека функцијата $y = f(x)$ има прв и втор извод во точка x_0 . Со знакот на првиот извод $f'(x)$ може да определиме дали функцијата $f(x)$ расте или опаѓа во околина на точката x_0 . На сличен начин со помош на знакот на вториот извод $f''(x)$ може да определиме дали $f'(x)$ расте или опаѓа во околина на x_0 .

Нека во точката x_0 функцијата има максимум. Ова значи дека првиот извод на функцијата лево од точката x_0 е позитивен (бидејќи функцијата расте), во x_0 вредноста е 0 и десно од точката x_0 е негативен (бидејќи функцијата опаѓа), тогаш првиот извод опаѓа. Од дефиниција за монотоност следува дека изводот на функцијата $f'(x)$ кој е $f''(x)$ е негативна т.е. $f''(x) < 0$ во околина на точката x_0 .

Слично, нека во точката x_0 функцијата има минимум. Ова значи дека првиот извод на функцијата лево од точката x_0 е негативен (бидејќи функцијата опаѓа), во x_0 вредноста е 0 и десно од точката x_0 е позитивен (бидејќи функцијата расте), тогаш првиот извод расте. Од дефиниција за монотоност следува, изводот на функцијата $f'(x)$ кој е $f''(x)$ е позитивен т.е. $f''(x) > 0$ во околина на точката x_0 .

Користејќи го ова размислување, може да запишеме уште една постапка за определување екстрем на функција.

Втора постапка за одредување на **екстрем** на функцијата $y = f(x)$

1) Се определува првиот извод $f'(x)$, се решава равенката $f'(x) = 0$ и се наоѓаат решенијата $x = x_i$, за $i = 1, 2, 3, \dots$ ако постојат. Се определуваат точките $(x_i, f(x_i))$, кои се стационарни точки и можни точки за екстремот.

2) Се определува вториот извод $f''(x)$ и се пресметува $f''(x_i)$.

Ако $f''(x_i) < 0$, тогаш $f(x)$ има локален максимум во точката $(x_i, f(x_i))$,

Ако $f''(x_i) > 0$, тогаш $f(x)$ има локален минимум во точката $(x_i, f(x_i))$,

Ако $f''(x_i) = 0$, тогаш не може да се одреди екстремот.

Пример 6. Да се најдат екстремите на функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 3$. (Функцијата е иста од пример 4, но сега ќе решаваме со втората постапка)

Решение: Го наоѓаме првиот извод на функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 3$, кој е $f'(x) = 2x - 2$.

Го изедначуваме првиот извод на нула $2x - 2 = 0$ и ја наоѓаме апсцисата на стационарната точка $2x = 2$, т.е. $x = 1$.

Ја наоѓаме ординатата на стационарната

точка $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

Точката е $A(1, -4)$.

Го наоѓаме вториот извод на функцијата

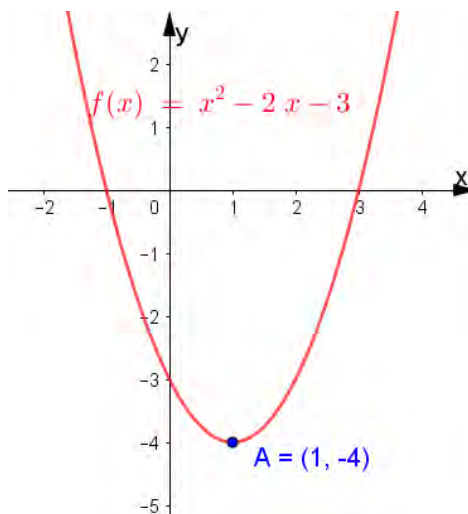
$$f''(x) = 2.$$

Го испитуваме знакот на вториот извод во

$$x = 1, \quad f''(1) = 2 > 0.$$

Следува, функцијата $f(x)$ има минимум во точката $A(1, -4)$.

На цртежот е претставен графикот на испитаната функција.



Пример 7. Да се најдат екстремите на функцијата $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Решение: Го наоѓаме првиот извод на функцијата $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$, кој е

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 3)'(x - 2) - (x^2 - 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}. \end{aligned}$$

Го изедначуваме првиот извод на нула и

ги наоѓаме апсцисите на стационарните

$$\text{точки: } f'(x) = 0, \text{ т.е. } \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0.$$

Дропката ќе биде еднаква на 0 ако

броителот е еднаков на 0, т.е.

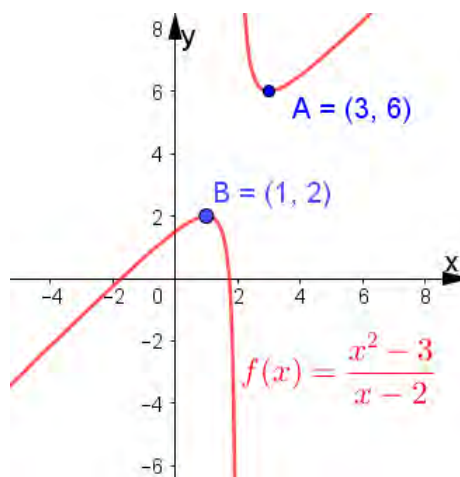
$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Решенија на равенката се $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Ги наоѓаме ординатите на стационарните

$$\text{точки } f(3) = \frac{6}{1} = 6 \text{ и } f(1) = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Стационарните точки се $A(3, 6)$ и $B(1, 2)$



Го наоѓаме вториот извод на функцијата,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 3)'(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 3)((x - 2)^2)'}{(x - 2)^4} = \\ &= \frac{(2x - 4)(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 3) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{(x - 2)((2x - 4)(x - 2) - 2(x^2 - 4x + 3))}{(x - 2)^4} = \\ &= \frac{(x - 2)(2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 6)}{(x - 2)^4} = \frac{2}{(x - 2)^3} \end{aligned}$$

Го испитуваме знакот на вториот извод во тие точки:

$$\text{Во точката } A(3, 6), \quad f''(3) = \frac{2}{(3 - 2)^3} = 2 > 0,$$

$$\text{и во точката } B(1, 2), \quad f''(1) = \frac{2}{(1 - 2)^3} = -2 < 0.$$

Следува, во точката $A(3, 6)$ функцијата $f(x)$ има минимум, а во точката $B(1, 2)$ функцијата $f(x)$ има максимум. Екстремите графички се претставени на сликата.

Задачи за вежбање:

1. Да се најдат екстремите на функцијата со првата постапка:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x + 4}$

б) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

в) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

г) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

д) $f(x) = \frac{x - 2}{x}$

ѓ) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

2. Да се најдат екстремите на функцијата со втората постапка:

а) $f(x) = \frac{5 - x^2}{x + 3}$

б) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

в) $f(x) = 1 + x + x^2 - x^3$

г) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

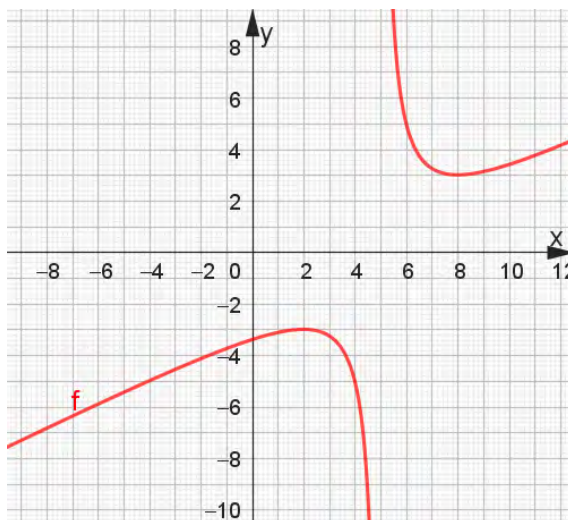
д) $f(x) = 4 - 9x + 6x^2 - x^3$

ѓ) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

3. Да се најдат локалните екстреми на функцијата

$$f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$$

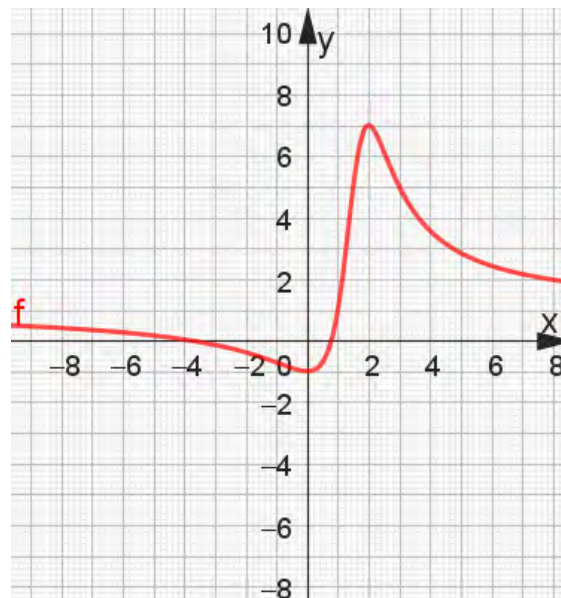
и според графикот (без наоѓање на вториот извод) да се определи нивниот карактер. Локалните екстреми да се обележат на графикот.



4. Да се најдат локалните екстреми на функцијата

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x + 3}$$

и според графикот (без наоѓање на вториот извод) да се определи нивниот карактер. Локалните екстреми да се обележат на графикот.



ИСПИТУВАЊЕ НА КОНВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ НА ФУНКЦИЈА. ПРЕВОЈНИ ТОЧКИ НА ФУНКЦИЈА

Претходно, утврдивме дека монотоноста на функцијата може да се определи според знакот на нејзиниот прв извод. Вториот извод, односно неговиот знак, исто така е поврзан со едно геометриско својство на графикот на функцијата, а тоа е закривеност на функцијата (испакнатост/вдлабнатост).

Дефиниција.

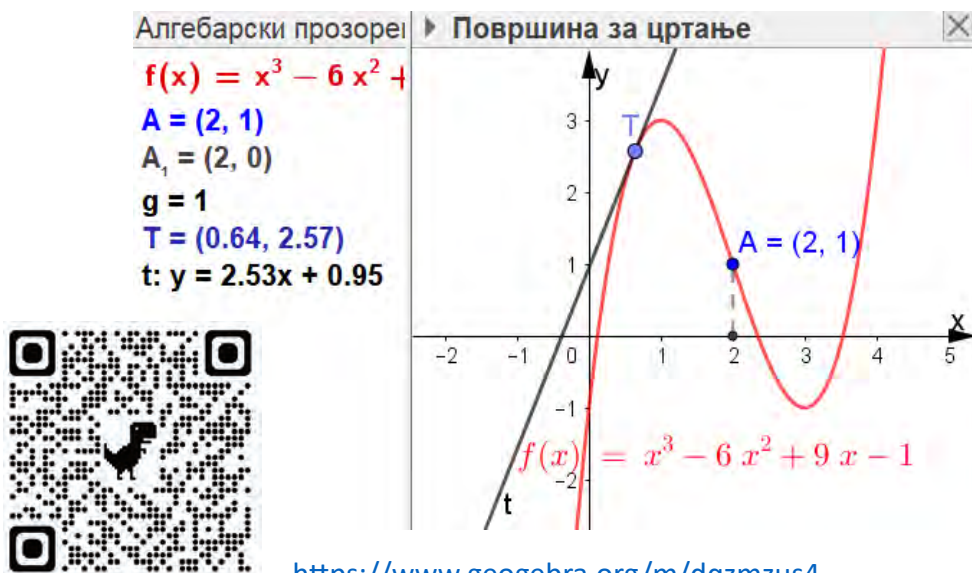
- Функцијата $y = f(x)$ е **конкавна** (вдлабната), на интервалот (a, b) , ако за секоја точка $x_0 \in (a, b)$ делот од кривата на тој интервал е над тангентата повлечена во точката $M_0(x_0, f(x_0))$.
- Функцијата $y = f(x)$ е **конвексна** (испакната), на интервалот (a, b) , ако за секоја точка $x_0 \in (a, b)$ делот од кривата на тој интервал е под тангентата повлечена во точката $M_0(x_0, f(x_0))$.

Како со помош на извод да определуваме конвексност и конкавност на функцијата?

За определување на интервалите на конвексност и конкавност на дадена функција $y = f(x)$ може да го искористиме вториот извод на функцијата.

Да ја разгледаме кривата $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Учениците може да го користат аплетот и да ја поместуваат точката T . Да ја набљудуваме положбата на тангентата во однос на кривата. Што може да се заклучи?



<https://www.geogebra.org/m/dqzmzus4>

Првиот и вториот извод на функцијата се $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ и $f''(x) = 6x - 12$. Ако вториот извод го изедначиме на 0, $f''(x) = 0$, ја добиваме равенка $6x - 12 = 0$. Решение на равенката е $x = 2$.

Од дефиниционата област ја отстрануваме стационарната точка на вториот извод и ја делиме на два интервали $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$.

Ако земеме две вредности $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$, така што $x_1 < x_2$, тогаш вредноста на првиот извод $f'(x_1) > f'(x_2)$, т.е вредноста на првиот извод ќе опаѓа па заради тоа $f''(x) < 0$. Исто така, ако ја разгледаме тангентата на функцијата во овој интервал, графикот на функцијата се наоѓа под тангентата на целиот интервал.

Од друга страна, за $x \in (-\infty, 2)$, вредноста на вториот извод е $f''(x) < 0$.

Следува функцијата $y = f(x)$ е конвексна (испакната) во интервалот $(-\infty, 2)$.

Аналогно, ако земеме две вредности $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$, така што $x_1 < x_2$, тогаш вредноста на првиот извод $f'(x_1) < f'(x_2)$, т.е вредноста на првиот извод ќе расте па заради тоа $f''(x) > 0$. Исто така, ако ја разгледаме тангентата на функцијата во овој интервал, графикот на функцијата се наоѓа над тангентата на целиот интервал.

Од друга страна, за $x \in (2, +\infty)$, вредноста на вториот извод е $f''(x) > 0$.

Следува функцијата $y = f(x)$ е конкавна (вдлабната) во интервалот $(2, +\infty)$.

Како се вика точката во која вториот извод е еднаков на 0 и во интервалите лево и десно од него знакот на вториот извод е различен?

Дефиниција. Точките на кривата што го делат интервалот во кој кривата ја менува својата закривеност - од испакната во вдлабната и обратно се нарекува **превојна точка** на кривата.

Постапка за одредување на **превојна точка** и интервали на испакнатост и вдлабнатост.

- 1) Се определуваат точките $(x_i, f(x_i))$ за $i = 1, 2, 3, \dots$ кои се можни превојни точки со пресметување на $f''(x)$ и решавање на равенката $f''(x) = 0$,
- 2) Најдените корени (решенија) на равенката $f''(x) = 0$ ги подредуваме по големина и го определуваме знакот на $f''(x)$ во секој интервал меѓу добиените корени од равенката. Притоа:
 - Во интервалот каде $f''(x) < 0$, функцијата е испакната (конвексна),
 - Во интервалот каде $f''(x) > 0$, функцијата е вдлабната (конкавна),
 - Ако $f''(x)$ го менува знакот при премин низ некој од добиените корени, тогаш таа вредност е апсциса на **превојна точка**.

Пример 1. Да се определат интервалите на коевксност и конкавност и превојните точки на функцијата $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 4x - 5$.

Решение: Првиот и вториот извод на функцијата се $f'(x) = -6x^2 + 18x - 4$ и $f''(x) = -12x + 18$.

Равенката $f''(x) = 0$, т.е. $-12x + 18 = 0$, има решение $x = \frac{3}{2}$. И вториот извод е дефиниран за секој реалан број.

Затоа множеството на реални брови е поделено на два интервали $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

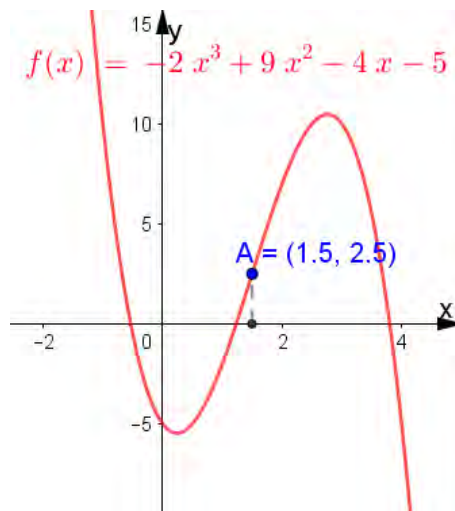
За $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, вредноста на вториот извод е $f''(x) > 0$. Следува дека функцијата $y = f(x)$ е конкавна (вдлабната) на интервалот $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

За $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, вредноста на вториот извод е $f''(x) < 0$. Следува дека функцијата е конвексна (испакната) на интервалот $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Бидејќи лево и десно од точката со апсциса $x = \frac{3}{2}$ има различен знак, следува дека точката $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ е превојна точка на дадената функција.

За $x = \frac{3}{2}$, добиваме $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} - 5 = \frac{5}{2}$, т.е. точката $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ е превојна точка на функцијата.

На цртежот графички претставена функцијата.



Задачи за вежбање:

1. Да се определат интервалите на конвексност и конкавност и превојните точки на функцијата $f(x) = x^2(1-x)$.
2. Да се определат интервалите на конвексност и конкавност и превојните точки на функцијата $f(x) = x - 2 - \frac{6}{x-1}$.
3. Да се определи параметарот a , така што кривата $y = x^3 + ax^2 + 1$ има превојна точка $P(1, y)$.
4. Да се докаже дека функцијата $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ има три превојни точки кои лежат на иста права.

ИСПИТУВАЊЕ НА ТЕКОТ И СКИЦИРАЊЕ ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

Досега видовме како со помош на првиот и вториот извод на дадена функција се испитуваат некои нејзини својста, како што се: монотоност, екстремна вредност, закривеност и превојни точки. Со гранична вредност на функција се испитуваат: асимптоти и непрекинатост на функцијата. Со испитување и на другите својства: парност, непарност, периодичност, пресеци со координатни оски, се добиваат доволно точки од функцијата за да може да го скицираме нејзиниот график.

За да го скицираме графикот на функцијата $f(x)$ ги одредуваме:

- 1) Дефиниционата област на функцијата;
- 2) Парност, непарност, периодичност на функцијата;
- 3) Пресечни точки на графикот на функцијата со координатните оски (нули и пресек со y – оска);
- 4) Асимптоти на функцијата;
- 5) Екстремни вредности, нивната природа и интервалите на монотоност на функцијата;
- 6) Превојни точки и интервали на закривеност;
- 7) Скицирање на графикот на функцијата.

Врз основа на добиените податоци се скицира графикот на функцијата. Препорачано е сите добиени податоци со аналитичкото испитување постепено да се внесуваат во координатниот систем за да се воочи текот и да се скицира графикот на функцијата.

Пример 1. Да се испита текот и да се скицира графикот на функцијата $y = x^3 - 3x + 2$.

Решение: Го испитуваме текот на функцијата според дадената постапка.

- 1) Бидејќи функцијата е полиномна, дефиниционата област на функцијата е множеството на реални броеви, т.е. $D_f = R$.
- 2) Парност и непарност. Дефиниционата област е симетрично множество. Затоа определуваме

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 = -(x^3 - 3x - 2).$$

Заклучуваме дека функцијата не е ниту парна, ниту непарна.

Не е периодична функција. Периодичноста е застапена најчесто кај тригонометриските функции, па затоа нема да ја испитуваме во секоја задача.

- 3) Пресечни точки на графикот на функцијата со координатните оски.

Нули на функцијата.

Ја изедначуваме функцијата на нула т.е. $x^3 - 3x + 2 = 0$. Со проба може да одредиме дека $x = 1$ е корен на равенката $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Бидејќи $x = 1$ е корен на оваа равенката,

за да ги определиме другите корени ќе го поделиме полиномот со $x-1$ и ќе добиеме количник полином за еден степен понизок и остаток 0, следува

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 -2x + 2 \\
 \underline{+2x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

Од равенката $x^2 + x - 2 = 0$, ги наоѓаме и другите нули. Со решавање на квадратната

равенка по формула $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2}$, добиваме $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ и $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$x = 1$, е двократна нула т.е. функцијата ја допира x -оската и тоа е точка $A(1, 0)$,

$x = -2$, е еднократна нула т.е. функцијата минува низ точката $B(-2, 0)$.

Пресечна точка со y -оска.

Заменуваме за $x = 0$ во функцијата и добиваме $y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Пресечна точка на функцијата со y -оската е точката $C(0, 2)$.

4) Асимптоти на функцијата

Хоризонтална асимптота нема, бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = \pm \infty$$

Вертикална асимптота нема, бидејќи дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$ и нема критична вредност.

Коса асимптота нема, бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)}{1} = +\infty$$

Забелешка: Полиномната функција нема асимптоти.

5) Екстремни вредности, нивната природа и интервалите на монотоност.

Ако изводот на функцијата $y' = f'(x) = 3x^2 - 3$. Ако го изедначиме на 0, ја добиваме равенката $3x^2 - 3 = 0$, т.е. $x^2 = 1$. Решенија на равенката се $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Ако $x_1 = 1$, тогаш $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = -2 + 2 = 0$. Следува дека $E_1(1, 0)$.

Ако $x_2 = -1$, тогаш $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$. Следува дека $E_2(-1, 4)$.

Точките $E_1(1, 0)$ и $E_2(-1, 4)$ се можни екстрими на функцијата.

Со пресметување на знакот на првиот извод на функцијата од знакот на произволна вредност од интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ може да определиме интервалите на монотоност и екстремите.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
интервал	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$f'(-2) = 9 > 0$	$f'(0) = -3 < 0$	$f'(2) = 9 > 0$	
Монотоност	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
Вредност на $f(x)$		4	0	
Точки		E_2	E_1	

Добиваме дека во $E_1(1, 0) \equiv A$ функцијата има минимум, а во $E_2(-1, 4)$ функцијата има максимум.

Интервалите на монотоност се:

$f(x)$ е монотono растечка за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

$f(x)$ е монотono опаѓачка за $x \in (-1, 1)$.

6) Превојни точки и интервали на закривеност.

За функцијата $y = x^3 - 3x + 2$, првиот извод е $y' = 3x^2 - 3$, и вториот извод е $y'' = 6x$.

За да ги определиме интервалите на закривеност вториот извод го изедначуваме на 0, $y'' = 0$. Ја добиваме равенката $6x = 0$, која има решение е $x = 0$.

Ако $x = 0$, тогаш $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Следува дека $P(0, 2)$.

Точката $P(0, 2)$ е можна превојна точка на функцијата.

Со пресметување на знакот на вториот извод на функцијата од знакот на произволна вредност од интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ може да ги определиме интервалите на закривеност.

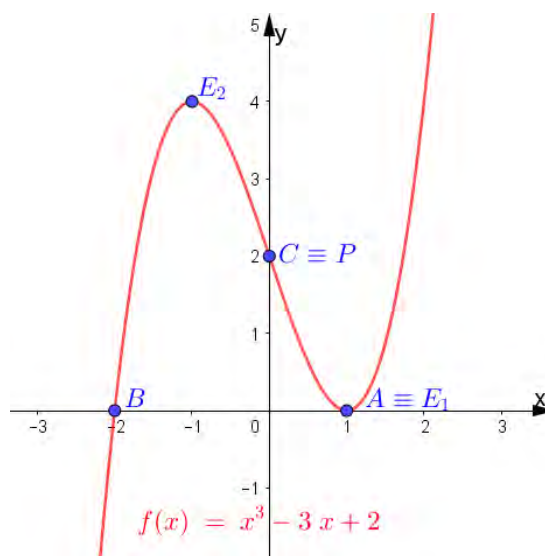
x	$-\infty$	0	$+\infty$
интервал	$(-\infty, 0)$		$(0, +\infty)$
$f''(x) = 6x$	$f''(-1) = -6 < 0$		$f''(1) = 6 > 0$
Закривеност	$\cap$		$\cup$
Вредност на $f(x)$	2		
Точки	P		

За $x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ е конвексна (испакната),

За $x \in (0, +\infty)$, $f(x)$ е конкавна (вдлабната).

Во точката $P(0, 2) \equiv C$, бидејќи се менува знакот на вториот извод функцијата има превојна точка.

7) График на функцијата $y = x^3 - 3x + 2$ е



Забелешка: За полесно цртање на функциите, после завршување на испитувањето, препорачливо е да се скицира графикот и во геогебра. На овој начин учениците самостојно ќе го проверуваат добиеното решение.

Пример 2. Да го испитаме текот и да го скицираме графикот на функцијата

$$f(x) = 3x^5 - 6x^3$$

Решение:

Го цртаме графикот на функцијата во Геогебра со запишување на функцијата во

полето за внес и ги определуваме соодветните вредности на функцијата со следните наредби:

За екстрем на функција наредбата: Екстрем (f)

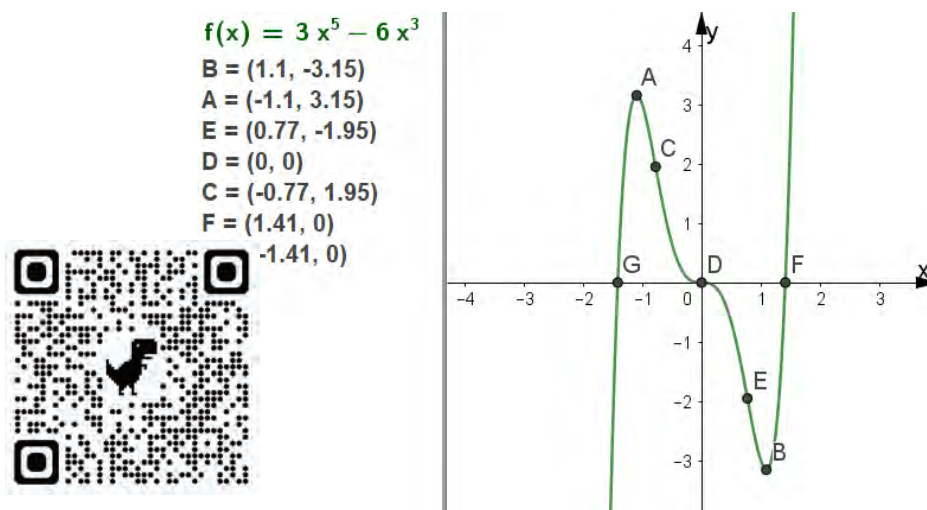
За превојна точка на функцијата наредбата: ПревојнаТочка (f)

За пресечна точка со y -оска наредбата: Пресек ($f, x=0$)

За пресечна точка со x -оска наредбата: Пресек ($f, y=0$)

За асимптоти на функцијата наредбата: Асимптота (f).

Во „Алгебарски прозорец“ на Геогебра се запишани координатите на сите добиени точки.



<https://www.geogebra.org/m/d6p3weqy>

Пример 3. Да се испита текот и скицира графикот на функцијата $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение: Го испитуваме текот на функцијата според дадената шема.

1) Дефинициона област.

Бидејќи функцијата е дробно рационална за определување на дефиниционата област треба да ја решиме равенката $x-1=0$, т.е. $x=1$ и решението да го исклучиме од множеството на реални броеви. Следува, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ т.е. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Парност и непарност.

Дефиниционата област D_f не е симетрична, нема потреба и да се испитува $f(-x)$. Заклучуваме дека функцијата е ниту парна, ниту непарна.

3) Пресечни точки на графикот на функцијата со координатните оски.

Пресечна точка со x -оска, се добива ако $f(x)=0$, т.е. се реши равенката $\frac{x^2}{x-1}=0$.

Дропката ќе биде еднаква на 0, ако броителот е еднаков на 0, т.е. $x^2=0$. Решение на

равенката е $x = 0$.

Следува, $A(0,0)$ е двократна нула.

Пресечна точка со y – оска се добива кога $x = 0$. Добиваме $f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$. Точката се совпаѓа со пресечната точка со x – оска, т.е тоа е точка $A(0,0)$.

4) Асимптоти на функција.

а) Вертикална асимптотата функцијата може да има за $x = 1$, бидејќи дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, т.е. критична вредност е $x = 1$.

Да ги определиме лева и десна гранична вредност за $x = 1$.

Левата гранична вредност ќе ја најдеме ако ја воведеме смената $x = 1 - h$, каде

$$h > 0 \text{ и } h \rightarrow 0, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2}{1-h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-2h+h^2}{-h} = -\infty$$

Десна гранична вредност ќе ја најдеме ако ја воведеме смената $x = 1 + h$, каде

$$h > 0 \text{ и } h \rightarrow 0, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2}{h} = +\infty$$

Добиваме дека вертикална асимптотата е правата $x = 1$, каде графикот од десно се доближува од горна страна на асимптотата, а од лево од долна страна на асимптотата.

б) Хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

Функцијата нема хоризонтална асимптота.

в) Коса асимптота е правата $y = kx + n$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

Коса асимптота на функцијата е правата $y = x + 1$.

Да определиме како се однесува графикот на функцијата во однос на косата асимптота.

Ја пресметуваме разликата:

$$f(x) - y = \frac{x^2}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Го одредуваме нејзиниот знак во однос на аргументот x .

Бидејќи $\frac{1}{x-1} > 0$ за $x > 1$, следува дека кривата е над асимптотата за $x > 1$, и бидејќи $\frac{1}{x-1} < 0$ за $x < 1$, следува дека кривата е под асимптотата кога $x < 1$.

5) Екстремни вредности, нивната природа и интервалите на монотоност.

Ако изводот на функцијата $y' = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, го изедначиме на 0, ја добиваме равенката $x^2 - 2x = 0$, т.е. $x(x-2) = 0$. Решенија на равенката се $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Ако $x_1 = 0$, тогаш $y(0) = \frac{0^2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$. Следува $E_1(0, 0)$.

Ако $x_2 = 2$, тогаш $y(2) = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$. Следува $E_2(2, 4)$.

Точките $E_1(0, 0)$ и $E_2(2, 4)$ се можни екстрими на функцијата.

Со пресметува знакот на првиот извод на функцијата од знакот што се добива кога ќе замениме произволна вредност од интервалите $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$ во првиот извод. Бидејќи првиот извод не е дефиниран во точка $x = 1$ точка за поделба на интервалите се зема и точката 1. Од табелата ќе ги определиме интервалите на монотоност и екстремите.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
интервал	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$	
$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$	$f'(-1) = \frac{3}{4} > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$	$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -3 < 0$	$f'(3) = \frac{3}{4} > 0$	
Монотоност	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
Вредност на $f(x)$		0	/	4	
Точки		E_1	/	E_2	

Значи добиваме дека во $E_1(0, 0) \equiv A$ функцијата има максимум, а во $E_2(2, 4)$ функцијата има минимум.

Интервалите на монотоност се:

За $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f(x)$ е монотono растечка,

За $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $f(x)$ е монотono опаѓачка.

6) Превојни точки и интервали на закривеност.

За функцијата $y = \frac{x^2}{x-1}$, првиот извод е $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, и вториот извод е:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)((2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x))}{(x-1)^4} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

За да ги определиме интервалите на закривеност вториот извод го изедначуваме на 0, $y'' = 0$. Ја добиваме равенката $2 = 0$, која нема решение.

Функцијата нема превојна точка.

Вториот извод не е дефиниран за $x = 1$.

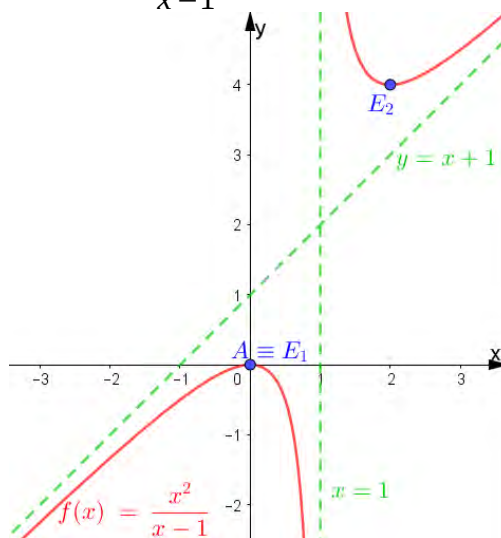
Се пресметува знакот на вториот извод на функцијата на интервалите $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ за да може да ги определиме интервалите на закривеност.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
интервал	$(-\infty, 1)$		$(1, +\infty)$
$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$	$f''(0) = -2 < 0$		$f''(2) = 2 > 0$
Закривеност	$\cap$		$\cup$
Вредност на $f(x)$		/	
Точки		/	

За $x \in (-\infty, 1)$, $f(x)$ е конвексна (испакната),

За $x \in (1, +\infty)$, $f(x)$ е конкавна (вдлабната).

7) График на функцијата $y = \frac{x^2}{x-1}$ е:



Пример 4. Да се испита текот и нацрта графикот на функцијата $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение: Го испитуваме текот на функцијата според дадената шема.

1) Дефинициона област е $D_f = \mathbb{R}$.

2) Парност на функцијата.

D_f е симетрична област.

$f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$, следува функцијата е непарна. Графикот на функцијата е симетричен во однос на координатниот почеток.

3) Пресечни точки на графикот на функцијата со координатните оски.

Пресечна точка со x – оска, се добива ако $f(x) = 0$, т.е се реши равенката $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.

Равенката ќе биде еднаква на 0, ако $x = 0$.

Значи, $A(0,0)$ е нула на функцијата.

Пресечна точка со y – оска се добива кога $x = 0$. Добиваме $f(0) = -0 \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = -0 \cdot e^0 = 0$. Точката се совпаѓа со пресечната точка со x – оската, т.е тоа е точката $A(0,0)$.

4) Асимптоти на функцијата

а) Вертикална асимптота. Бидејќи дефиниционата област на функцијата е целото множество на реални броеви следува дека функцијата нема вертикална асимптота.

б) Хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

Правата $y = 0$ е хоризонтална асимптота на функцијата.

Како се однесува графикот на функцијата во однос на хоризонталната асимптота?

Ја пресметуваме разликата:

$$f(x) - y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

Го одредуваме нејзиниот знак во однос на аргументот x .

Бидејќи $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 > 0$ за $x > 0$, следува кривата е над асимптотата за $x > 0$, и бидејќи $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 < 0$ за $x < 0$, следува кривата е под асимптотата за $x < 0$.

в) Коса асимптота.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \text{ функцијата нема коса асимптота.}$$

5) Екстремни вредности, нивната природа и интервалите на монотоност.

Го пресметуваме изводот на функцијата

$$y' = \left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2).$$

Ако го изедначиме на 0, ја добиваме равенката $e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) = 0$, т.е. $1 - x^2 = 0$. Решенија на равенката се $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Ако $x_1 = 1$, тогаш $y = f(1) = 1 \cdot e^{-\frac{1^2}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Следува $E_1 \left(1, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$, или ако пресметаме приближна вредност добиваме $E_1(1, 0.61)$.

Ако $x_2 = -1$, тогаш $y = f(-1) = (-1) \cdot e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = (-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$. Следува дека $E_2 \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$, или ако пресметаме приближна вредност добиваме $E_2(-1, -0.61)$.

Точките $E_1(1, 0.61)$ и $E_2(-1, -0.61)$ се можни екстрими на функцијата

Со пресметува знакот на првиот извод на функцијата од знакот што се добива кога ќе замениме произволна вредност од интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ во првиот извод. Од табелата ќе ги определиме интервалите на монотоност и екстремите.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
интервал	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$	$f'(-2) = -\frac{3}{e^2} < 0$	$f'(0) = 1 > 0$	$f'(2) = -\frac{3}{e^2} < 0$	
Монотоност	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
Вредност на $f(x)$		-0.61	0.61	
Точки		E_2	E_1	

Значи, добиваме дека во $E_1(1, 0.61)$ функцијата има максимум, а во $E_2(-1, -0.61)$ функцијата има минимум.

Интервалите на монотоност се:

За $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x)$ е монотono опаѓачка,

За $x \in (-1, 1)$, $f(x)$ е монотono растечка.

6) Превојни точки и интервали на закривеност.

За функцијата $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, првиот извод е $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$, и вториот извод е:

$$y'' = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) \right)' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x + x^3 - 2x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x)$$

За да ги определиме интервалите на закривеност, вториот извод го изедначуваме на 0, $y'' = 0$. Ја добиваме равенката $e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x) = 0$. Равенката ќе биде еднаква на 0, само ако $x^3 - 3x = 0$, т.е. $x(x^2 - 3) = 0$ која има решенија $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ и $x_3 = -\sqrt{3}$.

Ако $x_1 = 0$, тогаш $f(0) = 0 \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0$. Следува $P_1(0, 0)$.

Ако $x_2 = \sqrt{3}$, тогаш $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$. Следува $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$, или пресметани приближни вредности $P_2(1.73, 0.39)$.

Ако $x_3 = -\sqrt{3}$, тогаш $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}^2}{2}} = -\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$. Следува $P_3\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$, или пресметани приближни вредности $P_3(-1.73, -0.39)$.

Точките $P_1(0, 0)$, $P_2(1.73, 0.39)$ и $P_3(-1.73, -0.39)$ се можни превојни точки на функцијата.

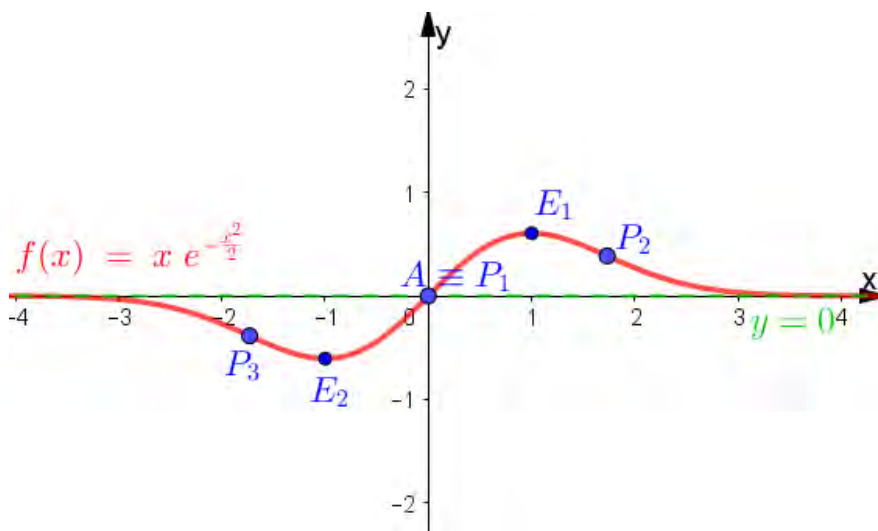
Со пресметување на знакот на вториот извод на функцијата од знакот на произволна вредност од интервалите $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$ може да ја определиме закривеноста на функцијата.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
интервал	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$	
$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x)$	$f''(-2) < 0$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(2) > 0$	
Закривеност	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	
Вредност на $f(x)$		-0.39	0	0.39	
Точки		P_3	P_1	P_2	

За $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, $f(x)$ е конвексна (испакната),

За $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $f(x)$ е конкавна (вдлабната).

7) Графикот на функцијата $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ е:



Задачи за вежбање:

1. Да се испита текот и скицира графикот на функцијата:

а) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ б) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ в) $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$

2. Да се испита текот и скицира графикот на функцијата:

а) $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$ б) $y = -x^3 + 3x - 2$ в) $y = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

3. Да се испита текот и скицира графикот на функцијата

а) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ б) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$ в) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$

4. Да се скицира графикот на функцијата:

а) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$ б) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x}$ в) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$

5. Да се испита текот и скицира графикот на функцијата

а) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ б) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ в) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Задачите може да ги претставите и во Геогebra (<https://www.geogebra.org/>) си го проверите вашето добиено решение.

6. Од графикот на функцијата $f(x) = \frac{3-4x}{x^2-4x+3}$ да се запишат одговорите на следните барања:

- Дефинициона област на функцијата,
- Пресечна точка со x – оска, ако постои,
- Пресечна точка со y – оска, ако постои,
- Интервалите на растење и опаѓање,
- Интервалите на испакнатост и вдлабнатост,
- Екстремите на функцијата, ако постојат,
- Превојните точки, ако постојат,
- Која е приближната вредноста на функцијата за $x = 4$,
- За која вредност на x функцијата има вредност $y = 4$,
- Дали функцијата е парна или непарна,
- Какви асимптоти има функцијата?

$$f(x) = \frac{3 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$I1 = \{y = 0, x = 1, x = 3\}$$

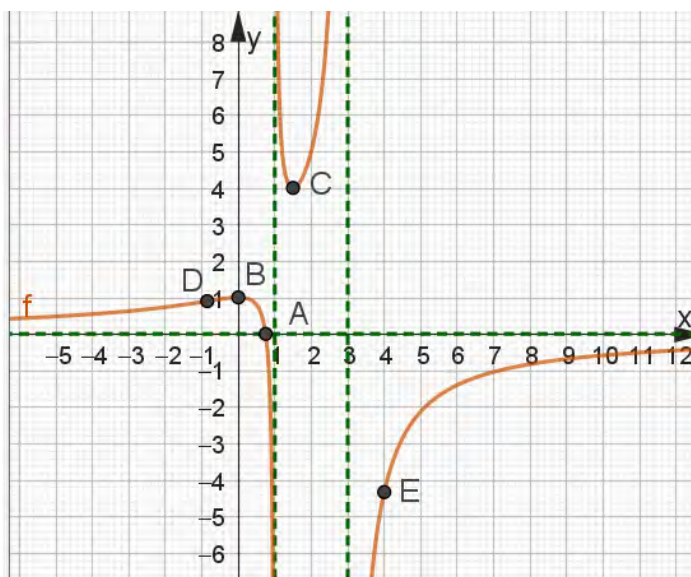
$$A = (0.75, 0)$$

$$B = (0, 1)$$

$$C = (1.5, 4)$$

$$D = (-0.85, 0.9)$$

$$E = (4, -4.33)$$



7. Од графикот на функцијата $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ да се запишат одговорите на следните барања:

- Дефинициона област на функцијата,
- Пресечна точка со x – оска, ако постои,
- Пресечна точка со y – оска, ако постои,
- Интервалите на растење и опаѓање,
- Интервалите на испакнатост и вдлабнатост,
- Екстремите на функцијата, ако постојат,
- Превојните точки, ако постојат,
- Која е приближната вредноста на функцијата за $x = 4$,
- Дали функцијата е парна или непарна,
- Какви асимптоти има функцијата?

Забелешка: $\sqrt{3} \approx 1.73$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

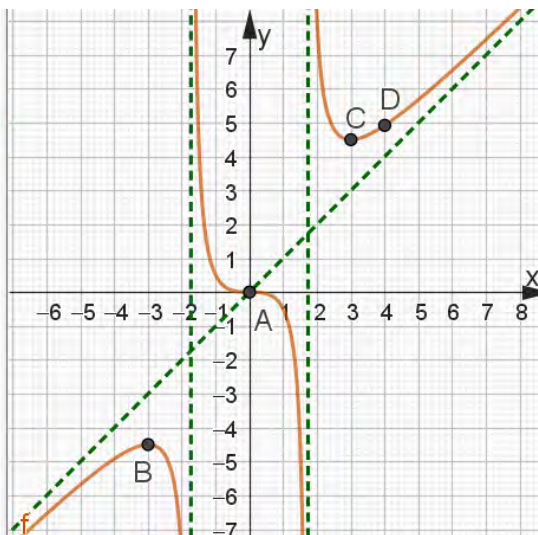
$$I1 = \{y = x, x = -1.73, x = 1.73\}$$

$$A = (0, 0)$$

$$C = (3, 4.5)$$

$$D = (4, 4.92)$$

$$B = (-3, -4.5)$$



9. ПРИМЕНА НА ИЗВОД ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМИ ОД ЕКСТРЕМИ

Пример 1. Претстави го бројот 90 како збир на два природни броеви, такви што производот на едниот од нив со квадратот на другиот е максимален.

Решение: Нека x е едниот број, тогаш $90 - x$ е другиот број.

Според условот на задачата, производот на едниот од нив со квадратот на другиот може да го запишеме со $P(x) = (90 - x) \cdot x^2$, каде што $0 \leq x \leq 90$.

Добивме функција од променлива x која може да ја запишеме како $P(x) = 90x^2 - x^3$.

Првиот извод е $P'(x) = 180x - 3x^2$ и ако го изедначиме на 0, ја добиваме равенката $180x - 3x^2 = 0$.

Следува, $3x(60 - x) = 0$, т.е. $3x = 0$ или $60 - x = 0$.

Решенија на равенката се $x_1 = 0$ и $x_2 = 60$, кои се стационарни точки за функцијата $P(x)$.

Вториот извод е $P''(x) = 180 - 6x$.

За $x_1 = 0$, $P''(0) = 180 - 6 \cdot 0 = 180 > 0$. Следува производот е минимален.

За $x_1 = 60$, $P''(60) = 180 - 6 \cdot 60 = 180 - 360 = -180 < 0$. Следува производот е максимален и изнесува $P(60) = (90 - 60) \cdot 60^2 = 108000$.

Бараните броеви се 60 и 30.

Пример 2. Бројот 40 да се претстави како производ на два множители така што збирот на нивните квадрати биде најмал.

Решение: Ако едниот од собироците го означиме со x , тогаш другиот собирок е $40 - x$. Збирот на нивните квадрати ќе биде $S(x) = x^2 + (40 - x)^2$.

Првиот извод на функцијата е $S'(x) = 2x + 2(40 - x)(-1) = 4x - 80$, кој го изедначуваме на 0. Ја добиваме равенката $4x - 80 = 0$. Следува $x = 20$ е стационарна точка за функцијата $S(x)$.

Вториот извод е $S''(x) = 4$.

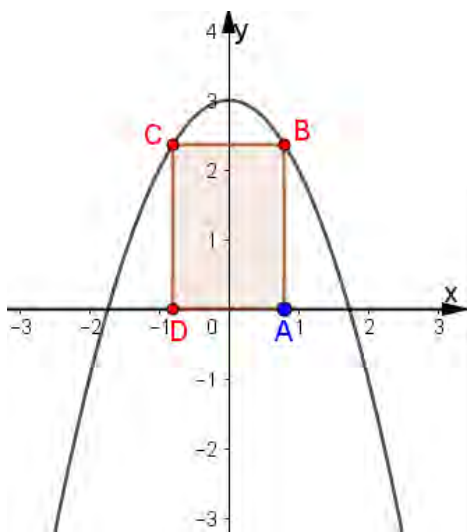
За $x = 20$, $S''(20) = 4 > 0$. Следува дека за $x = 20$ збирот $S(20) = 20^2 + (40 - 20)^2 = 800$ е максимален.

Бараните броеви се 20 и 20.

Пример 3. Стара куќа ќе се реновира. На едниот од сидовите кој има лачен свод прикажан како на сликата треба да се отвори врата со правоаголна форма која ќе има максимална големина. Да се утврдат димензиите на вратата ако најголемата висина на сводот е 3 m. Утврдено е дека работ на сводот е дел од графикот на функцијата $y = 3 - x^2$.



Решение: Направен е аплет во геогебра. Функцијата е внесена во координатен систем така што основата на собата е x – оската, а темето на параболата се наоѓа на y – оската.



Нека точката A има координати $(a, 0)$ и B има координати (a, b) .

Тогаш соодветно $C(-a, b)$ и $D(-a, 0)$.

Бараниот правоаголник има димензии на страните $2a$ и b .

Плоштината на правоаголникот е,

$$P = 2a \cdot b.$$

Бидејќи точката B треба да припаѓа на параболата $y = 3 - x^2$, тогаш важи равенката $b = 3 - a^2$.

Со замена добиваме функција за плоштината

$$P(a) = 2a \cdot (3 - a^2), \text{ т.е.}$$

$$P(a) = 6a - 2a^3.$$

<https://www.geogebra.org/m/uwkhppst>

Првиот извод на функцијата е $P'(a) = 6 - 6a^2$.

Со изедначување на 0, добиваме $6 - 6a^2 = 0$. Решението е $a = 1$ и $a = -1$. Што претставуваат симетрични решенија. Затоа ќе го определиме решението само за стационарната точка $a = 1$.

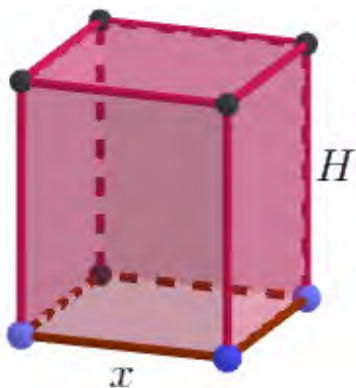
Вториот извод е $P''(a) = -12a$.

За стационарната точка $a = 1$, добиваме $P''(1) = -12 \cdot 1 = -12 < 0$, т.е. функцијата има максимална вредност.

Следува, за $a = 1$, $b = 3 - 1^2 = 2$ имаме максимална плоштина на вратата $P = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4m^2$. Вратата ќе биде широка $2m$ и висока $2m$.

Пример 4. Една фирма за својот производствен процес има потреба од вода, па треба да направи базен. Да се определат димензиите на базенот со дно во облик на квадрат и со волумен $32m^3$, така што за обложување со плочки на сидовите и дното се потроши најмалку материјал.

Решение: Нека базенот има дно во форма на квадрат со страна x и висина H . Плоштината на површините што треба да се обложи е $P = x^2 + 4xH$, каде плоштината на основата е x^2 и плоштината на еден бочен сид е xH .



Волуменот на базенот со основа квадрат е $V = x^2H$.

Од условот на задачата $V = 32m^3$, па добиваме $x^2H = 32$, т.е. $H = \frac{32}{x^2}$.

Заменувајќи го H во изразот за плоштина добиваме,

$$P(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}, \text{ која е функција со}$$

променлива x за која треба да го определиме екстремот.

Првиот извод е $P'(x) = \left(x^2 + \frac{128}{x} \right)' = 2x - \frac{128}{x^2}$ кој го изедначуваме на 0.

Следува, $2x - \frac{128}{x^2} = 0$, т.е. $2x^3 - 128 = 0$. Од $x^3 = 64$ го добиваме решението $x = 4$, кое е стационарна точка.

Вториот извод на функцијата $P''(x) = \left(2x - \frac{128}{x^2} \right)' = 2 + \frac{256}{x^3}$. Со замена $x = 4$ во вториот извод добиваме $P''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} = 6 > 0$. Следува дека функцијата $P(x) = x^2 + \frac{128}{x}$ за $x = 4$, ја добива вредноста $P(4) = 4^2 + \frac{128}{4} = 48m^2$ која е минимална вредност.

Бараните димензии на базенот за да имаме минимална плоштина ако има квадратна основа се: страна $4m$ и висина $H = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = 2m$.

Пример 5. Една авио компанија направила кампања за цената на билетот за новата авио линија. Авионскиот билет чини 200 евра ако во авионот има од 0 до 50 патници. За секој дополнителен патник цената на билетот се намалува за 2 евра. (Ако за линијата на пример купиле карти 53 патници, тогаш цената на секој билет ќе биде по 194 евра). Со колкав број на продадени билети ќе се оствари максимален приход?

Решение: Нека со x го означиме бројот на продадени авио билети поголем од 50.

Тогаш сумата што ќе ја заработи компанијата која има продадено $50 + x$ билети ќе ја пресметаме со: $S = (50 + x)(200 - 2x)$, каде $200 - 2x$ е цената на билетот.

Со средување на равеството добиваме,

$$S(x) = (50 + x)(200 - 2x) = 10000 + 100x - 2x^2.$$

Првиот извод на функцијата е $S'(x) = 100 - 4x$. Ако првиот извод го изедначиме на 0, добиваме $100 - 4x = 0$, т.е. $x = 25$ е стационарна точка.

Вториот извод е $S''(x) = -4$ и за $x = 25$ изводот е $S''(25) = -4 < 0$, што следува дека функцијата ќе има максимум. Максималниот приход ќе биде ,

За $x = 25$, следува $S(25) = 10000 + 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 11250$ евра.

Следува, бројот на продадени билети треба да биде $50 + x = 50 + 25 = 75$, и авио компанијата ќе има масимална заработувачка.

Пример 6. Цилиндричен контејнер со кружна основа потребно е да зафаќа (да има волуменот од) $64m^3$ Најди ги димензиите на контејнерот така што количината на употребен лим (површина) е минимална, ако контејнерот е отворен од горна страна.

Решение: Нека x и H се радиусот на основата и висината на контејнерот. Нека P е плоштината на употребениот лим и V е волуменот на контејнерот.

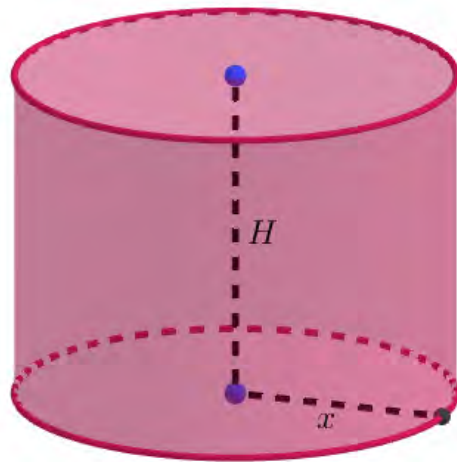
Од условна задачата $V = 64m^3$ и формулата за волумен на цилиндар е $V = r^2\pi H$.

Со замена добиваме $x^2\pi H = 64$.

Формулата за плоштина на цилиндар е

$$P = r^2\pi + 2\pi rH$$

(цилиндарот е отворен од горна страна, па затоа имаме плоштина само на една кружна основа).



Ако замениме $H = \frac{64}{x^2\pi}$ и радиусот со x во формулата за плоштина добиваме функција

$$P(x) = x^2\pi + 2\pi x \frac{64}{x^2\pi} = x^2\pi + \frac{128}{x}.$$

Изводот на функцијата е $P'(x) = 2x\pi - \frac{128}{x^2}$.

Од равенката $P'(x) = 0$, т.е. $2x\pi - \frac{128}{x^2} = 0$ ја добиваме стационарната точка $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Вториот извод е $P''(x) = 2\pi + \frac{256}{x^3}$.

За $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ добиваме $P''\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0$, т.е. функцијата има минимум.

Радиусот на основата е $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2.73m$, висината е $H = \frac{64}{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 \pi} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2.73m$ и минималната плоштина е $P = 48\sqrt[3]{\pi} m^2 = 70.3m^2$.

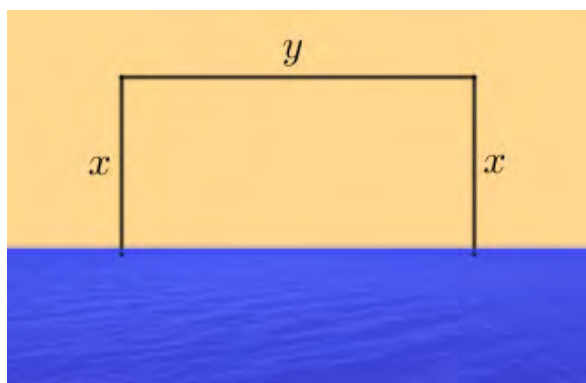
Пример 7. Фармер со $2400m$ жица сака да огради поле, во форма на правоаголник, кое се наоѓа покрај река, при што нема потреба да користи жица долж реката. Какви треба да бидат димензиите на правоаголникот за да оградениот дел има максимална површина?

Решение: Нека x и y се димензиите на полето. Бидејќи не треба да се користи жица вдолж реката, тогаш од условот на задачата за периметарот на обвивката имаме $2x + y = 2400$, т.е. $y = 2400 - 2x$.

Плоштината на полето е

$P = xy = x(2400 - 2x)$, т.е. ја добиваме функција

$$P(x) = 2400x - 2x^2.$$



Првиот извод на функцијата е $P'(x) = 2400 - 4x$.

Ако првиот извод го изедначиме на 0, добиваме равенка $2400 - 4x = 0$, која има решение $x = 600$, која е стационарна точка.

Вториот извод на функцијата е $P''(x) = -4$ и во стационарната точка $P''(600) = -4 < 0$. Следува за $x = 600$ функцијата има максимална вредност.

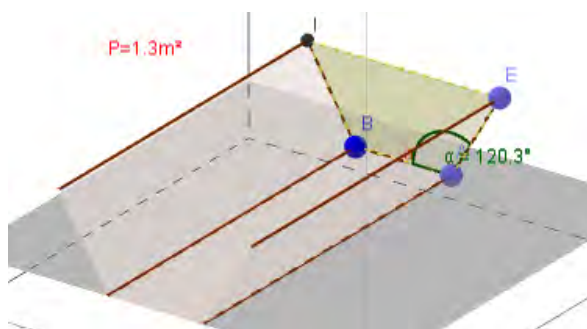
Страните на оградата треба да бидат $600m$ и $1200m$. Максималната плоштина на нивата е $720000m^2$.

Дополнителни практични примери со примена на извод за решавање проблеми од екстрими. Наменети се за учениците кои сакаат повеќе да истражуваат.

Пример 8. Треба да се направи отворен канал за вода со поврзување на три бетонски блокови со ширина 1m . Напечниот пресек на каналот е рамнокрак трапез со помала основа еднаква на кракот. Под кој агол во однос на основата треба да се постават страничните блоковите за да се направи корито со најголем пресек. (најголема пропусна моќ)

Решение: Прво малку да истражуваме. Пребарајте слики од одводен канал на интернет. Како изгледа каналот? Дали сте виделе ваков канал до сега?

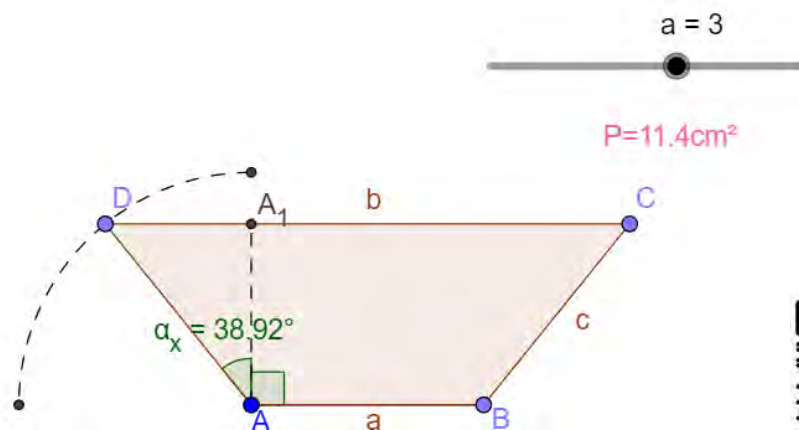
Сега може да се користи и аплет во Геогетра за изработка на канал.



Аплет: <https://www.geogebra.org/m/k4DNecD7>

Да ја движиме точката E и да се набљудува пропусната моќ на каналот.

Каналот ќе има најголема пропусна моќ ако напечниот пресек има најголема плоштина. Напечен пресек на каналот е рамнокрак трапез. Треба да определиме под кој агол треба да се постават бочните сидови на каналот за плоштината на рамнокракиот трапез е максимална.



Аплет: <https://www.geogebra.org/m/ESFG4SFj>

Ќе искористиме уште еден аплет за напречниот пресек на каналот. Со движење на подвижната точка D може да определиме во која положба треба да бидат поставени бочните сидови за да имаме максимална плоштина. Набљудуваме дека плоштината на трапезот се менува!

Сега може да направиме скица на напречен пресек.

Напречникот пресек е рамнокрак трапез, со крак еднаков на помалата основа.

Основата $a = \overline{AB} = 1m$ и кракот $c = \overline{BC} = \overline{AD} = 1m$.

Може да ги означиме другата основа со $b = \overline{CD}$ и висината $h = \overline{AA_1}$.

Плоштината на трапезот се пресметува со формулата $P = \frac{a+b}{2}h$.

Аголот што бочниот сид го гради со основата ќе го означиме со $x + 90^\circ$, каде што $0^\circ \leq x < 90^\circ$.

Од правоаголникот триаголник $\triangle AA_1D$ може да определиме h . Од тригонометриската формула $\cos x = \frac{h}{c}$, следува

$$h = c \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x, \text{ т.е. } h = \cos x.$$

Основата b , ќе ја определиме преку равенството $m = \overline{DA_1}$ на трапез.

$$b = a + 2m \text{ и } \sin x = \frac{m}{c}.$$

Следува $m = c \cdot \sin x = 1 \cdot \sin x = \sin x$, т.е. $b = 1 + 2\sin x$.

Со замена во формулата за плоштина добиваме $P = \frac{1+1+2\sin x}{2} \cdot \cos x$.

Може да замениме P со $f(x)$ и добиваме функција со променилва x ,

$$f(x) = \frac{2(1+\sin x)}{2} \cdot \cos x = (1+\sin x) \cdot \cos x = \cos x + \sin x \cdot \cos x, \text{ т.е.}$$

$$f(x) = \cos x + \sin x \cdot \cos x$$

За да определиме екстремот, првиот извод ќе го изедначиме на 0 и ќе ја решиме равенката.

$$f'(x) = (\cos x + \sin x \cdot \cos x)' = (\cos x)' + (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'$$

$$f'(x) = -\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

Од $f'(x) = 0$, ја добиваме равенката $-\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$.

Ако го искористи основниот тригонометриски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и замениме $\sin x = t$, добиваме квадратна равенка

$$-\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \text{ } /(-1), \text{ т.е. } 2t^2 + t - 1 = 0$$

Решенијата на квадратната равенка ги определуваме со постапката за решавање на квадратна равенка $t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$ и тие се $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -1$.

Ако се врати во смената за да се определи вредност на x , добиваме

$$\text{За } t_1 = \frac{1}{2}, \text{ следува дека } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\text{За } t_2 = -1, \text{ следува дека } \sin x = -1, \text{ т.е. } x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

Да го определиме вториот извод на функцијата

$$f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x)' = -\cos x + 2\cos x(-\sin x) - 2\sin x \cos x, \text{ т.е.}$$

$$f''(x) = -4\sin x \cos x - \cos x$$

$$\text{За } x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \text{ добивам } f''(30^\circ) = -4\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 30^\circ, \text{ т.е.}$$

$$f''(30^\circ) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$$

Следува функцијата има максимална вредност за $x = 30^\circ$

Вредноста $x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ не припаѓа на интервалот, нема потреба да се пресметува вредноста на вториот извод.

Со замена во почетните услови добиваме

$$b = 1 + 2 \cdot \sin 30^\circ = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2, \text{ и}$$

$$h = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

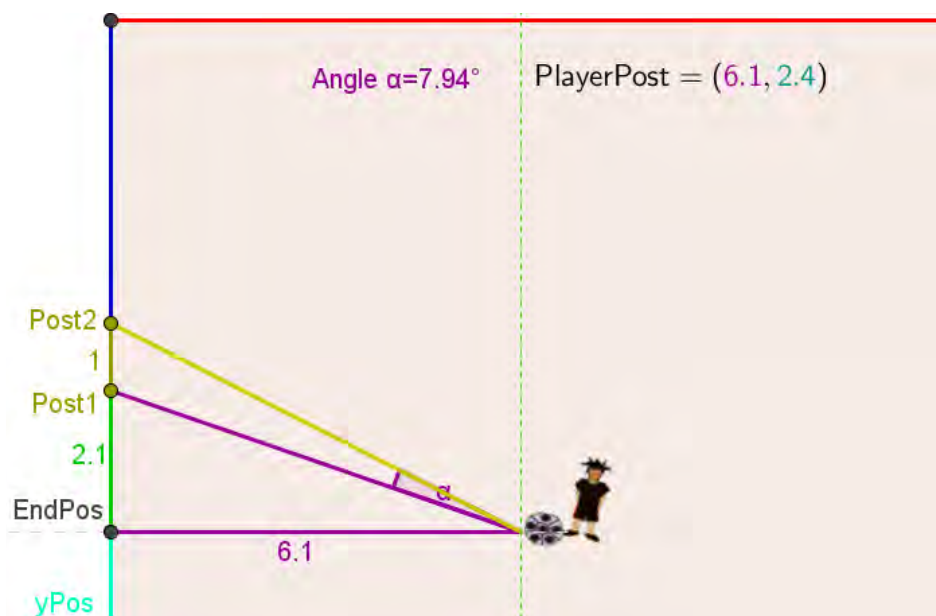
За максимална плоштина на трапезот добиваме

$$P = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ т.е. } P = 1,299 \approx 1,3m^2.$$

Пример 9. Фудбалер трча на игралиште по паралелна линија со аут-линијата. Од каде треба фудбалерот да го упати ударот кон голот, така што аголот за постигнување на гол да биде максимален?

Забелешка: Паралелната линија по која трча фудбалерот не треба да минува низ голот. Зошто? Кој е аголот во овој случај, од каде треба да го упати ударот фудбалерот за аголот да биде максимален?

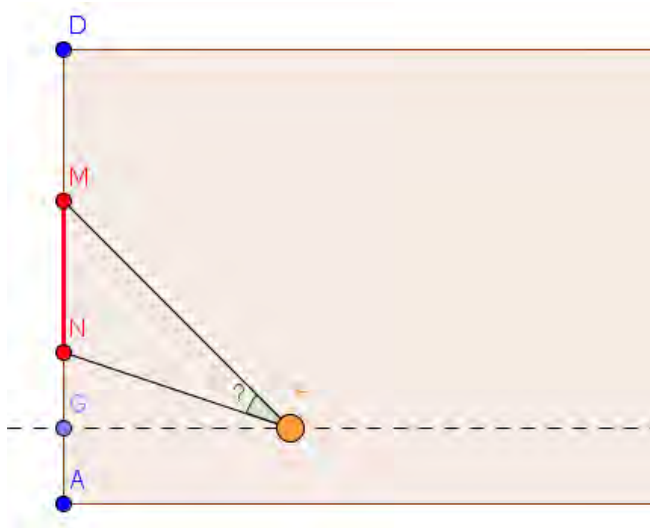
Решение: На почетокот може да искоритиме аплет и да видиме како се менува аголот со движењето на фудбалерот.



<https://www.geogebra.org/m/M7YfNB8r>



Да направиме скица на задачата.



Игралиштето има форма на правоаголник, а голот може да го претставим со точките.

Агол: прва стativa, фудбалер, втора стativa.

Означи го аголот со α .

Ознаки:

$\alpha = \angle NFM$

N – прва стativa

M – втора стativa

F – фудбалер.

Подвижна е точката F со која е претставен фудбалерот.

Тој се движи по права паралелна на аут линијата.

Паралелната права по која се движи фудбалерот не треба да минува низ голот.

Да ги разгледаме правоаголните триаголници $\triangle NGF$ и $\triangle MGF$.

Ознаки: $\overline{MN} = g$ - ширина на гол

$\overline{GN} = s$ - растојание од првата статива до пресекот на правата паралелна со аут линијата (по која се движи фудбалерот) и гол линијата.

$\overline{FG} = b$ - растојание на фудбалерот до гол линијата.

Од тригонометриските формули $tg(\angle GFN) = \frac{s}{b}$ и $tg(\angle GFM) = \frac{g+s}{b}$, следува $\angle GFN = \arctg \frac{s}{b}$ и $\angle GFM = \arctg \frac{g+s}{b}$.

Да го изразиме аголот $\alpha = \angle GFM - \angle GFN$, од каде следува дека

$$\alpha = \arctg\left(\frac{g+s}{b}\right) - \arctg\left(\frac{s}{b}\right).$$

Ако замениме $b=x$ и $\alpha = f(x)$, тогаш ја добиваме функцијата

$$f(x) = \arctg\left(\frac{g+s}{x}\right) - \arctg\left(\frac{s}{x}\right).$$

Изводот на функцијата е,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{g+s}{x}\right)^2} \cdot \frac{-(g+s)}{x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{s}{x}\right)^2} \cdot \frac{-s}{x^2} = \frac{-(g+s)}{x^2 + (g+s)^2} + \frac{s}{x^2 + s^2}$$

Ако $f'(x) = 0$, тогаш ја добиваме равенката $\frac{-(g+s)}{x^2 + (g+s)^2} + \frac{s}{x^2 + s^2} = 0$.

Со средување и решавање добиваме,

$$x^2 g + s^2 (g+s) = s(g+s)^2$$

$$x^2 g = s(g+s)^2 - s^2(g+s)$$

$$x^2 g = s(g+s)((g+s)-s)$$

$$x^2 g = s(g+s)g$$

$$x^2 = s(g+s) \text{ т.е. } x = \sqrt{s(g+s)} \text{ е стационарна точка.}$$

Вториот извод е $f''(x) = \frac{2x(g+s)}{(x^2 + (g+s)^2)^2} + \frac{-2sx}{(x^2 + s^2)^2}$.

Ако $x = \sqrt{s(g+s)}$, тогаш вредноста на вториот извод на функцијата во x е:

$$f''(\sqrt{s(g+s)}) = 2\sqrt{s(g+s)} \left(\frac{-g}{s(g+s)(g+2s)^2} \right) < 0$$

Бидејќи само $-g < 0$, количниот е негативен, т.е функцијата има најголема вредност.

Добиваме за $x = \sqrt{s(g+s)}$ максималната вредност на аголот е:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{g+s}{\sqrt{s(g+s)}}\right) - \arctg\left(\frac{s}{\sqrt{s(g+s)}}\right).$$

Што добиваме за решение?

Ако се заменат конкретни вредности од игралиште за мал фудбал каде што $g=3m$, и нека $s=6m$, тогаш

$$x = \sqrt{6(3+6)} = \sqrt{6 \cdot 9}, \text{ т.е. } x = 3\sqrt{6} \approx 7,35m \text{ и}$$

$$f(3\sqrt{6}) = \arctg\left(\frac{9}{3\sqrt{6}}\right) - \arctg\left(\frac{6}{3\sqrt{6}}\right) = 50,77^\circ - 39,23^\circ = 11,54^\circ$$

Фудбалерот треба да упати удар кога е на растојание $7,35m$ од гол линијата и максималниот агол ќе биде $11,54^\circ$.

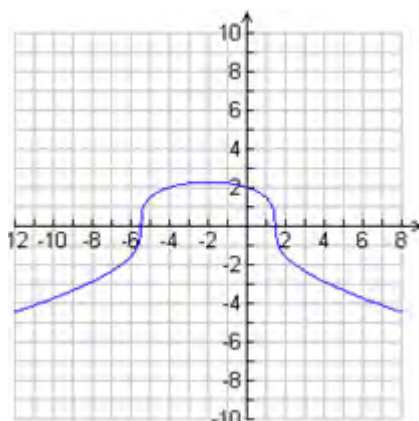
Задачи за вежбање:

1. Бројот 42 подели го на два дела (собироци) така што нивниот производ биде најголем.
2. Бројот 27 подели го на два дела (собироци) таа што збирот на нивните квадрати биде најмал.
3. Бројот 18 подели го на два дела (собироци) така што збирот на неговите кубови биде најмал.
4. Од сите правоаголници со периметар $26cm$, одреди го оној што има најголема плоштина.
5. Од сите правоаголници со периметар $22cm$, одреди го оној што има најмала дијагонала.
6. Учениците од четврта година за потребите на саемот за образование во нивното училиште треба да постават 32 клупи на спортското игралиште во правоаголна форма. Како да се постават клупите за да имаме најголема плоштина?
Ако една клупа има должина од $1,5m$ тогаш одреди по колку долги ќе бидат страните на правоаголната форма по поставување на клупите.
7. Од сите правоаголни триаголници со хипотенуза $10cm$ одреди го оној со најголема плоштина.
8. Во триаголник со основа $8cm$ и соодветна висина $3cm$, впиши правоаголник на кого едната страна ќе лежи на дадената основа на триаголникот со најголема плоштина.
9. Треба да се направи лимена цилиндрична кутија со плоштина $54\pi cm^2$. Пресметај го радиусот и висината на цилиндричната форма на кутијата која треба да биде прав кружен цилиндар и да има најголем волумен.
10. Во конус со радиус $4cm$ и висина $6cm$ впиши цилиндар со најголема волумен.
11. Околу топка со радиус $20cm$ треба да се направи (опише) конус со најмал волумен.

12. Од картон што има форма на правоаголник со димензии 48cm и 30cm да се направи кутија со најголем волумен. (Од сите 4 агли на картонот треба да се исече по еден квадрат и со виткање на картонот ќе се добие кутија без капак)
13. Во која точка на елипсата $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ од први квадрант, треба да се повлече тангентата која со координатните оски ќе образува триаголник со најмала плоштина.
14. Во област ограничена со $y = 4 - x^2$ и $y = 0$ да се впише правоаголник со страни паралелни со координатните оски чија плоштина е најголема.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА:

1. Да се пресмета извод на функцијата: $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.
2. Да се пресмета извод на функцијата: $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$.
3. Да се пресмета извод на функцијата: $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$.
4. Да се пресмета извод на функцијата: $f(x) = e^{3x} \sin(x^2 + 1)$.
5. Да се определи равенка на тангентата на графикот на функцијата $y = 4x - x^2$ во точката $x = 2$.
6. Да се определи равенка на нормалат на графикот на функцијата $f(x) = x^3 - 2x + 1$ во точката $x = -1$.
7. Да се определи брзината на материјална точка која врши праволиниско движење по законот на патот $s(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$ во времето $t = 2$.
8. Да се определи забрзувањето на материјална точка која врши праволиниско движење по законот на патот $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$ во времето $t = 1$.
9. Да се напише равенка на тангента и нормала на функцијата $f(x) = \sqrt[3]{8 - 4x - x^2}$ во точка со апсциса $x_0 = -4$. Добиените прави да се нацртаат на графикот.



10. Да се определат интервалите на монотоност на функцијата: $f(x) = \frac{1}{x^3}$.
11. Да се определат локалните екстрими на функцијата: $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.

12. Да се определат интервали на вдлабнатост/испакнатост и превојни точки на функцијата: $f(x) = x^3 - 3x^2$.
13. Да се испита тек и да се скицира график на функцијата: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
14. Да се испита тек и да се скицира график на функцијата: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
15. Бројот 60 подели го на два дела (собироци) така што нивниот производ биде најголем.
16. Бројот 80 подели го на два дела (собироци) таа што збирот на нивните квадрати биде најмал.
17. Бројот 100 подели го на два дела (собироци) така што збирот на неговите кубови биде најмал.
18. Од сите правоаголници со периметар 44cm , одреди го оној што има најголема плоштина.
19. Во конус со радиус r и висина H впиши цилиндар со најголема волумен.
20. Околу топка со радиус R треба да се направи (опише) конус со најмал волумен.
21. Во која точка на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ од први квадрант, треба да се повлече тангента која со координатните оски ќе образува триаголник со најмала плоштина.

ПРИЛОГ: ТЕСТОВИ

ТЕСТ БР: 1

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 1: НИЗИ И ПРОГРЕСИИ

Само еден од понудените одговори е точен. Реши ја и заокружи го точниот одговор. Секоја од задачите се вреднува со 3 бодови

1. Која од следните низи монотono опаѓа?

- а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ б) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$ в) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ г) $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \dots$

2. Во геометриската прогресија количникот $q = \frac{1}{2}$, четвртиот член е $a_4 = 3$, тогаш првиот член a_1 е:

- а) 8 б) $\frac{3}{8}$ в) 24 г) 17

3. Збирот на бескрајниот геометриски ред $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$ изнесува:

- а) 9 б) 3 в) $\frac{3}{2}$ г) $\frac{3}{4}$

4. Ако $a_1 = 2$ и $a_{30} = 60$ се членови на една аритметичка прогресија, тогаш $a_5 + a_{26}$ е:

- а) 62 б) 60 в) 31 г) 32

Пресметај и дополни за да биде точно тврдењето. Секоја од задачите се вреднува со 6 бодови

5. Дадената низата $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$ е _____. Првиот член е _____ и збирот на првите 5 членови е _____.

6. Првите пет членови на низата со општ член $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$ се: _____.

б) Низата гласи _____;

ТЕСТ БР: 2

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 2: ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Само еден од понудените одговори е точен. Реши ја и заокружи го точниот одговор. Секоја од задачите се вреднува со 6 поени

1. Дефинициона област на функцијата $f(x) = \log(x+3) - \log(4-x)$ е:

- а) $D_f = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$ б) $D_f = (-3, 4)$ в) $D_f = (-3, +\infty)$ г) друга вредност

2. Вредноста на функцијата $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$ за $x = -1$ е:

- а) $\frac{5}{8}$ б) $-\frac{1}{8}$ в) $\frac{3}{8}$ г) друга вредност

3. Нулите на функцијата $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ се:

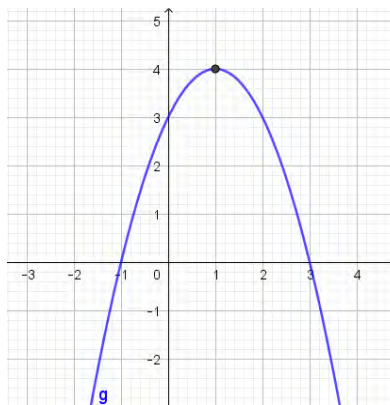
- а) 1 и -2 б) 1 и 2 в) -1 и 2 г) други вредности

Пресметај и дополни за да биде точно тврдењето. Секоја од задачите се вреднува со 10 поени

4. За квадратната функција

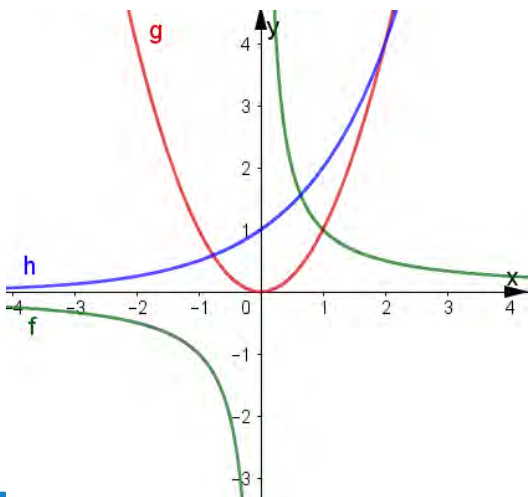
$f(x) = ax^2 + bx + c$, да се определат:

- а) координатите на темето _____
 б) знакот на параметарот a е _____,
 в) интервалите на монотоност се:
 г) пресечните точки со координатните оски се:



5. Кои од дадените алгебарски изрази одговара на функциите f , g и h .

- а) 2^x б) $\frac{1}{x^2}$
 в) x^3 г) x^2
 д) $\ln x$ ѓ) $\frac{1}{x}$



Реши ги задачите

6. Испитај ја монотоноста на функцијата, на дефиниционата област $f(x) = 2 - x^3$. (12)

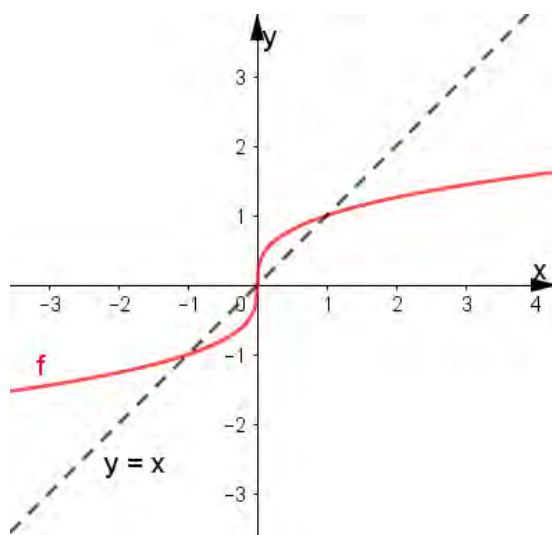
7. Одреди ја функцијата $f(x) = ax^2 + bx + 3$, ако $f(1) = 4$ и $f(-2) = -5$. Што претставува графикот. (12)

8. Најди инверзна функција на функцијата $f(x) = \frac{3x}{x-1}$. (12)

9. Скицирај инверзна функција на дадената функција $f(x)$.

Запиши ги координатите на точките кои остануваат во место при инверзија.

(12)



10. За функцијата $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 4}$ да се определи: (14)

а) дефиниционата област

б) нулите на функцијата

в) парноста на функцијата

г) монотоноста на функцијата во интервалот од $(4, +\infty)$

Предлог критериум за оценување:

0-30 Недоволен (1)	31-48 Доволен (2)	49-66 Добар (3)	67-84 Мн.добар (4)	85-100 Одличен (5)
-----------------------	----------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------

ТЕСТ БР: 3

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 3: ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Само еден од понудените одговори е точен. Реши ја и заокружи го точниот одговор. Секоја од задачите се вреднува со 6 поени

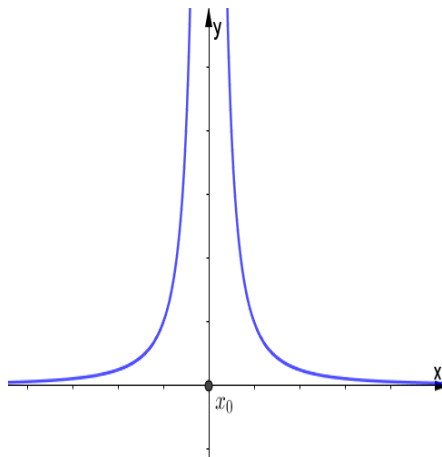
1. Граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9} = e$:

- а) 1 б) 2 в) -3 г) друга вредност

2. За функцијата $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ правата $x=1$ е:

а) хоризонтална асимптота, б) вертикална асимптота, в) коса асимптота, г) друг од.

3. Даден е графикот на функцијата. Да се определи соодветната гранична вредност во полето што е означено.



а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

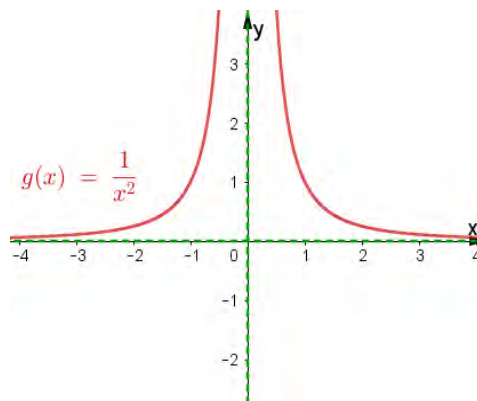
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

г) друга вредност

Пресметај и дополни за да биде точно тврдењето. Секоја од задачите се вреднува со 10 поени

4. Пресметаја ја граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$

5. Запиши ги асимптоти кои ги има функцијата зададена со нејзиниот график



6. Пресметај ја граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

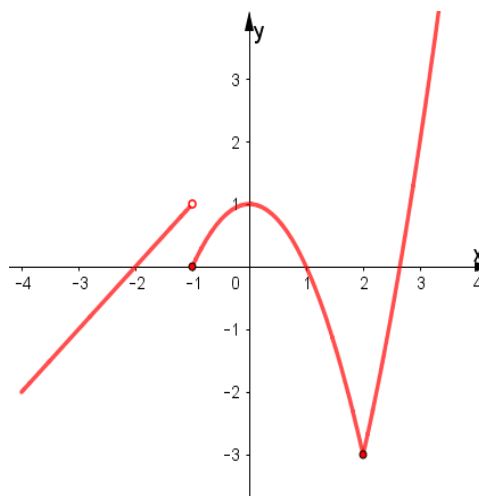
Реши ги задачите

7. Пресметај $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$ (12)

8. Најди ги асимптотите на кривата $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$ (12)

9. Најди ги точките на прекин на

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-7, & x \geq 2 \end{cases}$$



(14)

10. За која вредност на параметрите a и b функцијата

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \text{ е непрекината?} \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

(14)

Предлог критериум за оценување:

0-30 Недоволен (1)	31-48 Доволен (2)	49-66 Добар (3)	67-84 Мн.добар (4)	85-100 Одличен (5)
-----------------------	-------------------	-----------------	--------------------	-----------------------

ТЕСТ БР: 4

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 4: ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

Задачите се со две нивоа на тежина А и Б. За секоја од задачите реши една од понудените варијанти или под А или под Б. Само една се бодува.

1. Најди извод на функцијата:

а) $y = \frac{1}{5}x^5 + 3x^3 - 2\operatorname{ctgx}$ (8) б) $y = \sqrt[3]{x^2} - 3^x - 4\operatorname{tg}x$ (10)

2. Најди извод на функцијата:

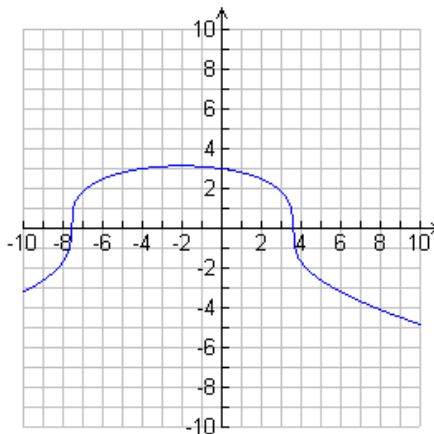
а) $y = 4x^5 \ln x$ (8) б) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ (10)

3.

а) За функцијата $f(x) = (1-x)e^x$, најди го вториот извод и пресметај $f''(-1)$ и $f''(0)$. (8) б) Одреди ги интервалите на монотоност на функцијата $f(x) = 7 + 3x^2 - x^3$ (15)

4.

а) Напиши равенка на тангента на кривата $y = 2x^2 - x - 7$, во точка $M(-2, y_0)$. (8) б) Да се напише равенка на тангента и нормала на функцијата $f(x) = \sqrt[3]{27 - 4x - x^2}$ во точка со апсциса $x_0 = -4$. Добиените прави да се нацртаат на графикот. (15)



5. Најди извод на сложена функција

а) $y = \ln(3x^2 - x)$

(10) б) $y = \ln(1 + \sqrt{1 + 2x}) - \sqrt{2x + 1}$ (15)

6.

а) Со логаритамско диференцирање да се најде изводот на функцијата

$$y = \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

(10)

б) Да се најдат локалните екстреми на

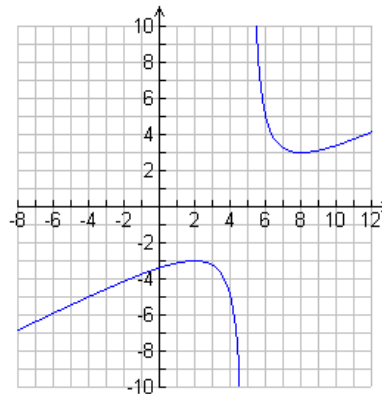
функцијата $f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$ и според

график (без наоѓање на вториот извод)

да се определи нивниот карактер.

Локалните екстреми да се нанесат на

графикот.



(15)

7. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата:

а) $y = x^3 + x^2 - 2$

(15) б) $y = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$ (20)

Предлог критериум за оценување:

0-30 Недоволен (1)	31-48 Доволен (2)	49-66 Добар (3)	67-84 Мн.добар (4)	85-100 Одличен (5)
-----------------------	-------------------	-----------------	--------------------	-----------------------

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИ

Модуларна единица 1 – НИЗИ И ПРОГРЕСИИ

1. ДЕФИНИЦИЈА И СВОЈСТВА НА НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. а) $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$ б) $-1, -1, -1, -1$ в) $2, 4, 8, 16, 32$ г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$; 4. а) $a_n = n^2$ б) $a_n = 2^n - 1$ в) $a_n = (-1)^{n+1}$ г) $a_n = \frac{2}{2^{n-1}}$.
5. $a_n - a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} > 0$ - монотонно опаѓа и $|a_n| < 1$ - ограничена; 6. монотонно расте и ограничена; 7. монотонно опаѓа, за $n > 2$ и ограничена; 8. монотонно опаѓа и ограничена; 9. а) монотонно опаѓа, б) монотонно расте, в) не расте и не опаѓа, г) монотонно опаѓа, д) не расте и не опаѓа; 10. а) ограничена, б) не е ограничена, в) не е ограничена, г) ограничена, д) ограничена.

2. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

1. $a_{15} = 44$; 2. $n = 15$; 3. 239; 4. 200; 5. После 9 години, $n = 9$; 6. 3, 8, 13; 7. Во 10 месец; 8. 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100.
9. 14, 8, 2, -6, ...; 10. а) -14, -12, -10, -8, -6, ... б) 7, 10, 13, 16, 19, ...; 11. а) $a_8 = 25$ б) $a_9 = -\frac{3}{2}$ в) $a_{12} = 46$ г) $a_{15} = 15a + b$

3. ЗБИР НА ПРВИТЕ N – ЧЛЕНОВИ НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

1. $a_{25} = 101$ и $S_{25} = 1325$; 2. 8, 5, 2, -1, -4, ...; 3. $n = 9$; 4. $x = 39$; 5. $S_{100} = 3000$; 6. Првото лице добило 1750 денари, а последното 6250 денари; 8. $a_n = 10 + 10(n-1) = 10n$;
9. 4 или 9 членови; 10. 21 член; 11. $-\frac{16}{7}, \frac{16}{7}, \frac{48}{7}, \frac{80}{7}, \dots$

4. ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. $a_{10} = \frac{1}{64}$; 2. $a_{20} = 3^{19}$; 3. $a_1 = \frac{1}{64}$; 4. $a_1 = 6, q = 3$; $a_1 = -6, q = -3$; 5. 2, -4, 8, -16, 32, ...; 6. $b = \pm 15$
7. $a_1 = 3, q = 2$ и геометриската прогресија е: 3, 6, 12, 24, 48, ...; 8. 8, -4, 2, -1, $\frac{1}{2}, \dots$; 9. $a_1 = 5, q = 2$; $a_1 = -15, q = -2$
10. $a_1 = 1, q = 5$; $a_1 = 1, q = -5$; 11. $\frac{13}{3}, \frac{26}{3}, \frac{52}{3}, \frac{104}{3}, \frac{208}{3}, \dots$

5. ЗБИРОТ НА ПРВИТЕ N-ЧЛЕНОВИ НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. $a_1 = 7$; 2. $S_{10} = 14762$; 3. $S_8 = 1530$; 4. $S_{15} = -65534$; 5. а) 6561 евро б) 3487 евра; 6. $q = 2, n = 6$; 7. $n = 6, a_6 = -486$
8. а) $a_1 = \frac{3}{8}, S_5 = \frac{55}{216}$ б) $n = 6, S_6 = -\frac{481}{15552}$; 9. $a_1 = 1, q = 3, n = 4$; 10. $\frac{1}{2}, 1, 2$; 11. 139

6. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА НИЗА

1. $n > 124$; 2. $n > 10$; 3. $n > 100$; 4. $n > 29$; 5. $n > 5$; 7. $n > 16$; 8. $n > 149$; 9. $n > 39$; 10. $n > 5$; 11. а) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots$ в) не, г) да, ф) $n > 1000$.

7. ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

1. 2; 2. $-\frac{1}{2}$; 3. 1; 4. $\frac{1}{3}$; 5. 0; 6. 0; 7. $+\infty$; 8. $\frac{1}{3}$; 9. 5; 10. $+\infty$; 11. 0; 12. $\frac{1}{3}$; 13. 0; 14. e; 15. e^3 ; 16. 1; 17. -2; 18. e;

8. ЗБИР НА ЧЛЕНОВИ НА БЕСКОНЕЧНА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. $\frac{3}{4}$; 2. $\frac{20}{3}$; 3. $\frac{92}{3}$. Користи збир на две бесконечни геометриски прогресии; 4. $\frac{2}{5}$; 5. 5; 6. а) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, б) 12; 7. $\sqrt{5}$, 8. $3\sqrt[3]{147}$
9. $\frac{322}{99}$; 10. $\frac{1307}{300}$; 11. $\frac{3391}{990}$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА.

1. Монотонно расте и ограничена; 2. Монотонно опаѓа за $n \geq 2$ и ограничена; 3. 6, 10, 14, 18, 22; 4. 10 член; 5. $a_1 = 3, q = 2$;
6. Со модел Б. Ќе плати 420 денари; 7. Со првиот модел 2720 евра, а со вториот модел 2536,48 евра; 8. Вториот модел. Заработка со првиот модел 10500 денари, а со вториот модел 16383 денари; 9. Првиот 9500 денари, а последниот 500 денари; 10. 120, 480 и 15360 бактерии; 11. 62; 12. 168. Користи збир на бесконечна геометричка прогресија. Една кога топчето оди надолу, а друга кога топчето се оди нагоре; 13. 35 долари; 14. 1120000 примероци; 15. 1126 диви животни; 16. 33 тули; 17. 78 лега коцки.
18. Стрните се 4, 6, 9. Упатство: Користи скратена формула $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$.
19. а) 5, б) 0; 20. $\frac{124}{999}$

Модуларна единица 2 – ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

1. ПОИМ ЗА ФУНКЦИЈА

1.1. ДЕФИНИЦИОНА ОБЛАСТ НА ФУНКЦИЈА

Задача 1. а) $D_f = R$, б) $D_f = R \setminus \{-1, 4\}$, в) $D_f = (-\infty, 4)$, г) $D_f = R \setminus \{2\}$, д) $D_f = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$, е) $D_f = R$;

1.2. НУЛИ НА ФУНКЦИЈА

Задача 2. а) $N_f = \{-2, 2\}$, б) $N_f = \{-1, 0, 1\}$, в) $N_f = \emptyset$, г) $N_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, д) $N_f = \emptyset$, е) $N_f = \{0, 1, 2\}$.

1.3. ПАРНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Задача 3. а) парна, б) непарна, в) ниту парна, ниту непарна, г) ниту парна, ниту непарна, д) парна, е) непарна.

1.4. ОГРАНИЧЕНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Задача 4. а) $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ - ограничена, б) $0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1$ - ограничена.

1.5. МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Задача 5. а) монотонно расте, б) монотонно опаѓа, в) монотонно расте на дефиниционата област, г) монотонно опаѓа, д) монотонно расте, е) монотонно опаѓа на дефиниционата област.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ:

1. а) $D_f = R$ б) $D_f = R$ в) $D_f = R \setminus \{-3, 3\}$; 2. а) $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ б) $D_f = R$; 3. а) $D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ б) $D_f = (1, 5]$
 4. а) $D_f = R \setminus \{0, 5\}$ б) $D_f = R \setminus \{1, 3\}$ в) $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ г) $D_f = (4, +\infty)$ д) $D_f = (-3, 3)$ е) $D_f = (-4, 4)$
 5. 9, 6, 4, $2a^2 - 3a + 4$; 6. $f(x) = -2x - 1$; 7. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; 8. а) $N_f = \{1, 2\}$ б) $N_f = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; 9. а) $N_f = \{-2, -1, 0, 1\}$
 б) $N_f = \{3\}$; 10. а) $N_f = \{-2, 2\}$ б) $N_f = \{-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}\}$ 11. а) $D_f = R$, $N_f = \{-4, 2\}$ б) $D_f = R \setminus \{4\}$, $N_f = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$
 в) $D_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, $N_f = \{-4, 4\}$ г) $D_f = R$, $N_f = \{2\}$; д) $D_f = (-2, +\infty)$, $N_f = \{998\}$
 12. а) непарна, б) парна, в) ниту парна, ниту непарна; 13. а) парна, б) парна, в) ниту парна, ниту непарна, г) непарна, д) ниту парна, ниту непарна, е) парна; 14. а) монотонно расте, б) монотонно расте, в) монотонно опаѓа, г) монотонно расте, д) монотонно опаѓа;
 15. а) ограничена б) ограничена в) ограничена г) ограничена д) ограничена е) ограничена; 16. а) $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 12x + 5$, $(g \circ f)(x) = -1 - 3x^2$ б) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$, $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$ в) $(f \circ g)(x) = \frac{x+7}{x+5}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x+6}$
 г) $(f \circ g)(x) = \lg \sqrt{x}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\lg x}$; 17. а) $f(x) = 3x - 7$ б) $f(x) = 4 - x^2$ в) $f(x) = \sin x$

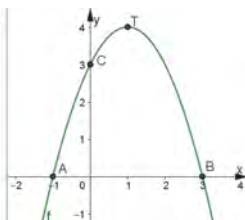
2. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

1. а) $A(0, 1)$ и $B(-1, 0)$ б) $A(0, 3)$ и $B(3, 0)$ в) $A(0, 2)$ и $B(-6, 0)$ г) $A(0, -1)$ и $B(1, -1)$;
 2. а) $y = 2$ б) $x = -3$ в) $y = x + 5$ г) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 3. а) $y = -3x - 1$ б) $y = \frac{1}{2}x$; 4. а) $y = x$ б) $y = -x$

3. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

1. а) $T(-1, -1)$, $A(-2, 0)$, $B(0, 0)$, $C(-3, 3)$ и $D(1, 3)$ б) $T(3, -4)$, $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 5)$ и $D(6, 5)$ в) $T(0, -4)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(-1, -3)$ и $D(1, -3)$;
 2. а) $D_f = R = (-\infty, +\infty)$ б) $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ в) $T(1, 4)$, и $y_{\max} = 4$ за $x=1$ г) $V_f(-\infty, 4]$ д) расте за $x \in (-\infty, 1)$, опаѓа за $x \in (1, +\infty)$

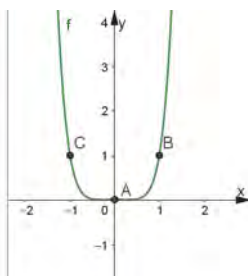
г) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
 $B = (3, 0)$
 $A = (-1, 0)$
 $C = (0, 3)$
 $T = (1, 4)$



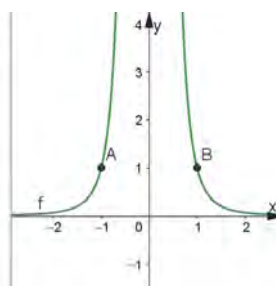
3. $f(x) = x^2 + 1$
 4. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

4. СТЕПЕНСКА ФУНКЦИЈА

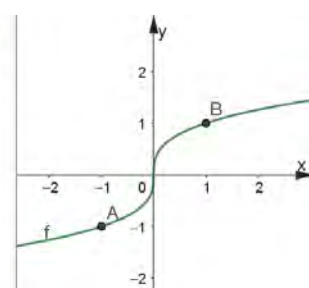
1. а) $f(x) = x^6$
 $A = (0, 0)$
 $B = (1, 1)$
 $C = (-1, 1)$



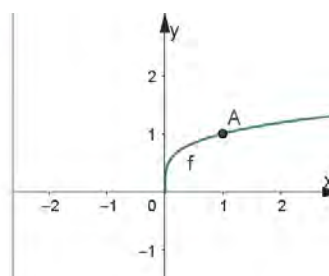
б) $f(x) = x^{-4}$
 $B = (1, 1)$
 $A = (-1, 1)$



2. а) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
 $B = (1, 1)$
 $A = (-1, -1)$

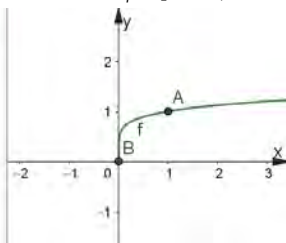


б) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$
 $A = (1, 1)$



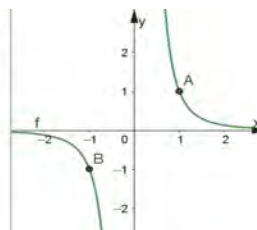
3. а) $D_f = [0, +\infty)$ б) Да в) $V_f = [0, +\infty)$ г) Ограничена од долу $0 \leq x^{\frac{1}{6}} < +\infty$

д) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
 $A = (1, 1)$
 $B = (0, 0)$



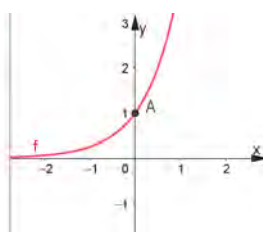
4. а) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ б) Не в) $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ г) Не

д) $f(x) = x^{-3}$
 $A = (1, 1)$
 $B = (-1, -1)$

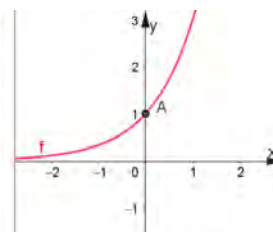


5. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

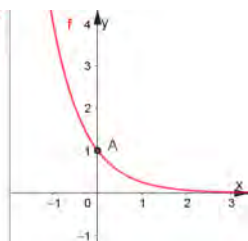
1. а) $f(x) = 4^x$
 $A = (0, 1)$



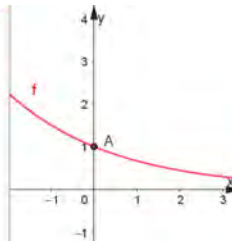
б) $f(x) = 3^x$
 $A = (0, 1)$



2. а) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
 $A = (0, 1)$



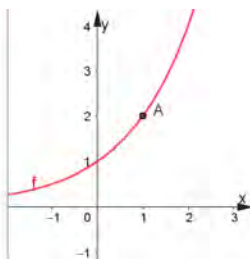
б) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
 $A = (0, 1)$



3. а) $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ б) $D_f = \mathbb{R}, V_f = (0, +\infty)$ в) Ограничена од долу, $f(x) > 0$

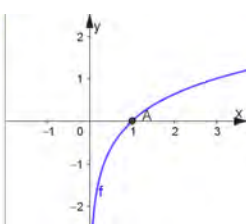
г) За $a > 1$, функцијата монотонно расте на целата дефинициона област, а за $0 < a < 1$ функцијата монотонно опаѓа на целата дефинициона област д) Нема нули;

4. $f(x) = 2^x$
 $A = (1, 2)$

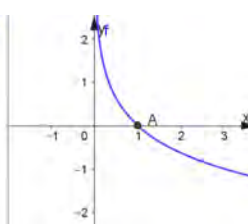


6. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

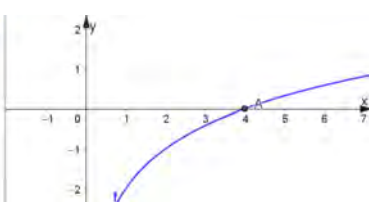
1. а) $f(x) = \log_3(x)$
 $A = (1, 0)$



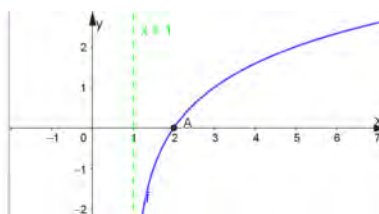
б) $f(x) = \log_3(x)$
 $A = (1, 0)$



2. а) $f(x) = -2 + \log_2(x)$
 $A = (4, 0)$

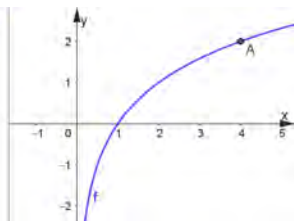


б) $f(x) = \log_2(x - 1)$
 $g: x = 1$
 $A = (2, 0)$



3. а) $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ б) $D_f = (0, +\infty)$ и $V_f = \mathbb{R}$ в) Не г) За $a > 1$, функцијата монотонно расте на целата дефинициона област, а за $0 < a < 1$ монотонно опаѓа на целата дефинициона област д) Да ;

4. $f(x) = \log_2(x)$
 $A = (4, 2)$



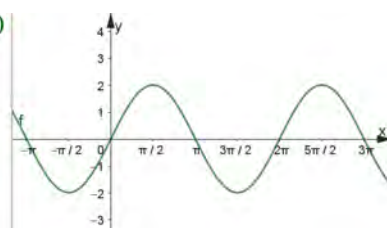
7. ПОИМ ЗА ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

1. а) $f^{-1}(x) = \frac{4}{3} - 2x$ б) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$; 2. а) $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ б) $f^{-1}(x) = 2 + \log(x-3)$; 4. $a = 1$, $b = 0$ или $a = -1$, $b \in \mathbb{R}$;

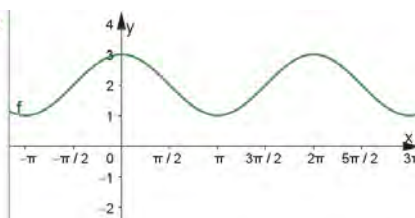
5. а) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$ б) $f^{-1}(x) = x^2 - 1$, $x \in [0, +\infty)$ в) $f^{-1}(x) = \log_2(x+1)$, $x \in (1, +\infty)$ г) $f^{-1}(x) = e^{x-1} - 2$ д) $f^{-1}(x) = \frac{2-2x}{1+x}$

8. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

1. а) $f(x) = 2 \sin(x)$



б) $f(x) = \cos(x) + 2$



2. а) Да, б) Да, в) Да; 3. а) Парна б) Непарна в) Ниту парна, ниту непарна.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА.

1. а) $D_f = R$, б) $D_f = R \setminus \{-4, 1\}$, в) $D_f = (-2, 2)$; 2. а) $N_f = \emptyset$, б) $N_f = \{-1, 1\}$, в) $N_f = \{0\}$; 3. $f(x) = 2x - 2$
 4. а) парна, б) парна, в) парна; 5. а) $f^{-1}(x) = \frac{8}{9} - \frac{4}{3}x$, б) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2x-1}$, в) $f^{-1}(x) = (x+2)^3$, г) $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$;
 6. а) $f(-2) = 1$, $f(0) = 2$, $f(3) = \frac{7}{2}$ б) $(-4, 0)$, $(0, 2)$ г) расте за $x \in R$ д) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ $\dot{r}$ за $x = -2$ е) за $x \in (-\infty, -6)$;
 7. а) $f(-2) = 5$, $f(0) = 1$, $f(3) = -5$ б) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$ г) опаѓа за $x \in R$ д) $(-\infty, -5)$ $\dot{r}$ за $x \in (3, +\infty)$; 8. а) Не б) опаѓа за $x \in R$
 в) $f(2) = -1$, $f(-1) = 2$ г) $(3, +\infty)$ д) за $x = 2$ $\dot{r}$ за $x \in (-4, 0)$; 9. а) за $x = 0$ има најголема вредност б) расте за $x \in (-\infty, 0)$, опаѓа за $x \in (0, +\infty)$ в) $f(1) = 2$, $f(0) = 4$ г) $(0, 2)$ д) Нема $\dot{r}$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; 10. а) Нема б) опаѓа за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
 в) $f(1) = 0$, $f(0) = 1$ г) $(-\infty, -1)$ д) за $x = 0$ $\dot{r}$ за $x \in (-\infty, -1)$

Модуларна единица 3 – ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

1. ПОИМ ЗА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

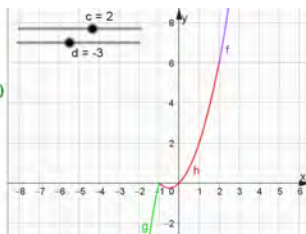
1. а) 19, б) $\frac{1}{5}$; 2. а) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ б) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ в) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
 г) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ д) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\dot{r}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; 3. а) 2, б) дивергира, в) 2,
 г) дивергира, д) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\dot{r}$ $3\sqrt[3]{b^2}$ е) 3; 4. а) $-\frac{3}{2}$ б) $\frac{5}{9}$ в) $\frac{1}{32}$ г) дивергира, д) 1, $\dot{r}$ 2, е) 1; 5. а) 2, б) $\frac{3}{4}$ в) 0, г) $+\infty$ д) 1, $\dot{r}$ 0,
 е) $-\frac{b}{2}$; 6. а - 2, б - 3, в - 1;

2. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

2. а) 0, б) 1, в) -1; 4. а = 1; 5. б = -3;

6. $c = 2$, $d = -3$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + x, \quad (-1 \leq x \leq 2) \\ f(x) &= 2x^2 - 3x + 4, \quad (2 \leq x \leq \infty) \\ g(x) &= 1 - 2x - 3x^2, \quad (-\infty \leq x \leq -1) \end{aligned}$$



3. АСИМПТОТИ НА КРИВА

1. $x = 0$ е вертикална асимптота, $y = 1$ е хоризонтална асимптота; 2. $x = -4$ е вертикална асимптота, $y = 1$ е хоризонтална асимптота; 3. $x = 1$ е вертикална асимптота, $y = x + 1$ е коса асимптота; 4. $x = 2$ е вертикална асимптота, $y = x + 7$ е коса асимптота; 5. $x = 0$ е вертикална асимптота, $y = 2$ е хоризонтална асимптота; 6. $x = 1$, $x = 2$ се вертикални асимптоти, $y = 1$ е хоризонтална асимптота; 7. $x = 0$ е вертикална асимптота, $y = x + 1$ е коса асимптота; 8. $x = -2$, $x = 2$ се вертикални асимптоти, $y = -x$ е коса асимптота; 9. $y = 0$ е хоризонтална асимптота; 10. $y = -1$, $y = 1$ се хоризонтални асимптоти; 11. $y = \frac{x}{3}$ е коса асимптота; 12. $y = 0$ е хоризонтална асимптота; 13. $y = -2$ е хоризонтална асимптота; 14. $y = \frac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота; 15. $x = -2$, $x = 2$ се вертикални асимптоти, $y = 0$ е хоризонтална асимптота.

4. ГРАНИЦИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ. АСИМПТОТИ НА ГРАФИЦИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

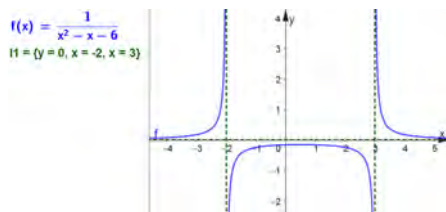
1. а) Нема б) $x = 0$ е вертикална асимптота, $y = 0$ е хоризонтална асимптота в) $y = 0$ е хоризонтална асимптота;
 2. а) Нема б) Нема в) Нема г) Нема; д) $x = 0$ е вертикална асимптота, $y = 0$ е хоризонтална асимптота $\dot{r}$ Нема е) $x = 0$ е вертикална асимптота ж) $x = 0$ е вертикална асимптота з) $y = 0$ е хоризонтална асимптота с) $y = 0$ е хоризонтална асимптота

5. СПЕЦИЈАЛНИ ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ

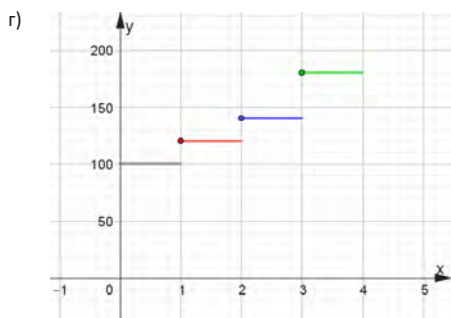
1. а) $\frac{4}{7}$, б) $\frac{1}{2}$ 2. а) 4, б) $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$; 3. а) e б) e^{-3} 4. а) $e^{-\frac{4}{3}}$ б) e^4

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА:

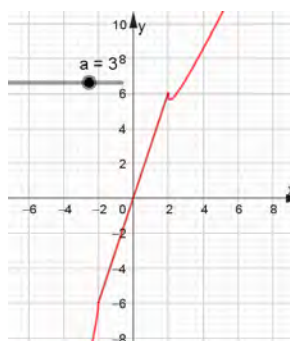
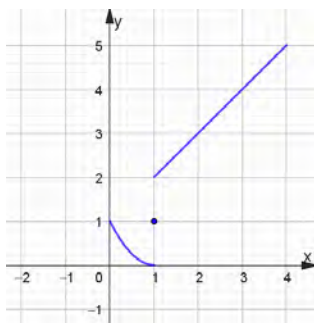
1. а) 9, б) $\frac{13}{14}$; 2. а) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ б) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$; 3. а) $\frac{1}{2}$, б) 1, в) $\frac{1}{3}$, г) $\frac{8}{3}$, д) 2, е) $\frac{1}{4}$ -2, ж) $-\frac{1}{3}$, з) $\frac{2}{3}$; 4. а) 3, б) $-\frac{1}{4}$, в) $-\frac{1}{2}$; 5. а) $\frac{2}{3}$, б) -1, в) 1; 6. а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{7}{4}$, в) $\frac{2}{5}$, г) $\frac{1}{2}$, д) $\frac{1}{2}$, е) e^4 , в) e^{-4} , ж) e^2 , з) $\frac{1}{e}$; 8. а) за $x = -2$, $x = 3$ б) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$ в) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ г) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ г) од три.



9. а) $x = -1$ е вертикална асимптота, $y = 3$ е хоризонтална асимптота, б) $x = -1$, $x = 1$ се вертикални асимптоти, $y = 1$ е хоризонтална асимптота, в) $x = 0$ е вертикална асимптота, $y = 2$ е хоризонтална асимптота, г) $y = -x$ е коса асимптота; 10. а) $f(0,75) = 100$, $f(1) = 120$, $f(3,5) = 180$ б) Не постои в) $D_f = (0, 4)$, д) Да.



12. 13. Не постои; 14. $a = 0$; 15. $a = 3$



Модуларна единица 4 - ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА

1. а) 0.5, б) 0.791, в) 0.0033, г) -0.045; 2. а) 2, $f'(-2) = 2$ б) $-\frac{2}{x^3}$, $f'(1) = -2$ в) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(3) = \frac{1}{4}$ г) $3x^2$, $f'(-1) = 3$; 3. а) 5, б) $\frac{2}{x^3}$, в) $6x + 2$, г) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; 4. а) $2^x \ln 2$, $f'(0) = \ln 2$ б) $\frac{1}{x}$, $f'(e) = \frac{1}{e}$ в) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(3) = \frac{1}{4}$ г) $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$, $f'(0) = 0$; 5. Упатство: Пресметај извод по дефиниција и покажи дека во соодветната вредноста на x , $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$.

2. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ИЗВОДИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

1. а) $7x^6$, б) $\frac{2}{5\sqrt{x^3}}$, в) 0, г) $-\frac{4}{x^5}$; 2. а) $7^x \ln 7$, б) $\frac{1}{x \ln 7}$, в) $\frac{1}{x}$, г) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; 3. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{x \ln 3}$, в) $-\sin x$, г) $\frac{1}{\cos^2 x}$;
 4. а) e^x , б) $\frac{1}{1+x^2}$, в) 1, г) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. а) $6^x \ln 6$, б) $-\frac{1}{1+x^2}$, в) $\frac{4}{3\sqrt{x}}$, г) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

3. ИЗВОД ОД ЗБИР, РАЗЛИКА, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

1. 5; 2. $3x^2 - 4x + 3$; 3. $3x^2 - 3$; 4. $12x^3 - 18x^2 + 2x - 4$; 5. $1 - \frac{1}{x^2}$; 6. $-\frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^5}$; 7. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$; 8. $2x - 2 \cos x$;
 9. $2 \cos x - 4 \sin x$; 10. $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + 5^x \ln 5$; 11. $4x^3 \ln x + x^3$; 12. $3x^2 \cos x - x^3 \sin x$; 13. $2 \sin x + 2x \cos x$;
 14. $12x^{11} e^x \operatorname{tg} x + x^{12} e^x \operatorname{tg} x + \frac{x^{12} e^x}{\cos^2 x}$; 15. $e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; 16. $36x^5 - 60x^4 + 8x^3 - 30x^2 + 24x - 2$;
 17. $2x - \cos^2 x + \sin^2 x$; 18. $-\frac{1}{x^2}$; 19. $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$; 20. $\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2}$; 21. $\frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; 22. $\frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$;
 23. $\frac{4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$; 24. $\frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$; 25. $\frac{e^x (\sin x + x \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$; 26. $\frac{\sin x - x}{1 - \cos x}$; 27. $2 \cos x - \frac{1}{2} e^x + \frac{7}{x^2 + 1}$;
 28. $\frac{1}{3\sqrt{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{4x^4}$; 29. $\frac{2}{1 + \sin(2x)}$; 30. $-\frac{e^x + \cos x + x \sin x + x \cos x}{x^2 e^x}$; 31. $\frac{6}{7\sqrt{x}} + \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{\cos^2 x}$;
 32. $x^3 e^x (4 \sin x + x \sin x + x \cos x)$; 33. $\frac{x^2 - 10x + 16}{2(x - 5)^2}$; 34. $\frac{x \cos x - x \sin x - e^x - \sin x}{x^2 e^x}$; 35. $\frac{\cos x - x \ln x \sin x - 2 \ln x \cos x}{x^3}$;
 36. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$; 37. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$; 38. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x \cdot \sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{\ln x \cdot \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}}$; 39. $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2 (\sqrt[3]{x} - 1)}{2x\sqrt{x}}$; 40. $\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

4. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

1. $15(5x - 7)^2$; 2. $\frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}$; 3. $(2x - 2)e^{x^2 - 2x + 5}$; 4. $\frac{2}{2x - 9}$; 5. $\frac{2}{x(1 - x^2)}$; 6. $\frac{1}{x^2 - 1}$; 7. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 8. $\sin x^4 + 4x^4 \cos x^4$;
 9. $5x^4 \cos x^5$; 10. $5 \sin^4 x \cdot \cos x$; 11. $-3 \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \cos x^3 - 3x^2 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x^3$; 12. $\frac{-1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$; 13. $\frac{18(x - 3)^2}{(x + 3)^4}$;
 14. $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$; 15. $\frac{x \cos(\sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$; 16. $\frac{1}{2(1 - x^2)}$; 17. $(2x - 2) \operatorname{ctg}(x^2 - 2x + 2)$; 18. $-\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$; 19. $\frac{8x}{16 - x^4}$; 20. $\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2}$;
 21. $\frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; 22. $\frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; 23. $\frac{4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$; 24. $\frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$; 25. $\frac{e^x (\sin x + x \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$;

5. ЛОГАРИТАМСКИ ИЗВОДИ

1. $-\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^5} \right) + \frac{5}{x^5 + 1} \right)$; 2. $-\frac{1}{(x - 2)^2} \left(\frac{x + 7}{x - 2} \right)^{\frac{1}{x - 2}} \left(\ln \left(\frac{x + 7}{x - 2} \right) + \frac{9}{x + 7} \right)$; 3. $-\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^7}} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^7} \right) + \frac{7}{x^2 + 1} \right)$;
 4. $-\frac{1}{(x + 4)^2} \left(\frac{x + 5}{x + 4} \right)^{\frac{1}{x + 4}} \left(\ln \left(\frac{x + 5}{x + 4} \right) + \frac{1}{x + 5} \right)$; 5. $(\sin x)^{\sin^2 x} (\sin(2x) \cdot \ln(\sin x) + \sin x \cdot \cos x)$;
 6. $(\sin x)^{\cos x} (\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln(\sin x))$; 7. $\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} (1 - \ln x)$; 8. $(\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$; 9. $\left(1 - \frac{1}{x + 1} \right)^x \left(\ln \left(1 - \frac{1}{x + 1} \right) + \frac{1}{x + 1} \right)$;
 10. $x^{x+1} (x + 1) \left(\ln x + \frac{x + 1}{x} + \frac{1}{x + 1} \right)$; 11. $x^{x^x} (x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1})$; 12. $\left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\cos x} \left(\frac{\cos x (1 - \ln x)}{x \ln x} - \sin x \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)$;
 13. $\frac{x + 3}{(x - 7)\sqrt[4]{(x + 2)^3}} \left(\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 7} - \frac{3}{4(x + 2)} \right)$; 14. $\frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{(x + 2)^2} \cdot \sqrt[4]{(x + 3)^3}} \left(\frac{1}{2(x - 1)} - \frac{2}{3(x + 2)} - \frac{3}{4(x + 3)} \right)$;
 15. $\frac{(1 - x^2) \cdot e^{3x - 1} \cdot \cos x}{\sin^3 x} \left(3 - \frac{2x}{1 - x^2} - \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x \right)$; 16. $\sqrt{(x + 1)^3} \cdot \frac{2x - 1}{x + 2} \cdot e^{x^2} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^3 x \left(\frac{3}{2(x + 1)} + \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x + 2} + 2x + 4 \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x \right)$

6. ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ. ОДРЕДУВАЊЕ РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА ФУНКЦИЈА

1. $t: y = -2x + 3$, $n: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 2. $t: y = x + \frac{1}{4}$; 3. $t: y = 2x - \frac{1}{4}$; 4. а) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ б) $B(0, 2)$; 5. $n: y = -\frac{1}{7}x + \frac{36}{7}$;
 6. а) $t: y = 3$, $n: x = 2$ б) $t: y = x\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}$, $n: y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ в) $t: x = 3$, $n: y = 0$; 7. $n: y = x - \frac{3}{e^2}$; 8. а) $k_t = 4$, $k_n = -\frac{1}{4}$,
 б) $k_t = \sqrt{10}$, $k_n = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; 9. а) $A(2, \ln 2)$, б) $B\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$; 10. $A(1, 0)$ и $B(1, -1)$;

7. ПРИМЕНА НА ИЗВОД ВО ФИЗИКА

1. а) $32m/s$, $40m/s^2$ б) $1120m/s$, $232m/s^2$; 2. а) $29.43m/s$, $9.81m/s^2$ б) $9.81m/s$, $9.81m/s^2$; 3. $1s$;
 4. а) $v(t) = t^3 - 12t^2 + 32t$, б) $4s$; 5. $4s$.

8. ПРИМЕНА НА ИЗВОД. ИСПИТУВАЊЕ ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

ИСПИТУВАЊЕ МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА

1. а) расте за $x \in (-\infty, 0)$, опаѓа за $x \in (0, +\infty)$, б) расте за $x \in (3, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-\infty, 3)$ в) расте за $x \in (1, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-\infty, 1)$ г) расте за $x \in (-\infty, 2)$, опаѓа за $x \in (2, +\infty)$; 2. а) расте за $x \in (0, 2)$, опаѓа за $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,
 б) расте за $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-2, 3)$, в) расте за $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$,
 г) расте за $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-2, 3)$; 3. а) расте за $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, опаѓа за $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$,
 б) расте за $x \in (-1, 1)$, опаѓа за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, в) расте за $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, опаѓа за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$,
 г) расте за $x \in (0, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-\infty, 0)$; 4. а) расте за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-1, 1)$, б) расте за $x \in (0, 2)$, опаѓа за $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, в) расте за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-1, 1)$, г) расте за $x \in (-1, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-\infty, -1)$.

ИСПИТУВАЊЕ ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈА

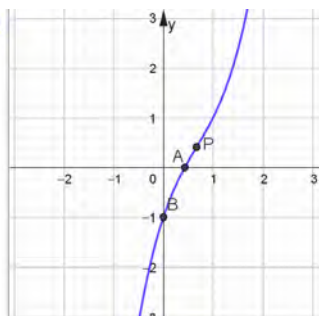
1. а) максимум во $A(-7, -14)$, минимум во $B(-1, -2)$, б) максимум во $(-1, -2)$, минимум во $(1, 2)$, в) максимум во $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{27}\right)$,
 минимум во $(1, -2)$, г) минимум во $(1, 1)$, д) нема екстрем е) максимум во $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, минимум во $(3, -9)$;
 2. а) максимум во $(-1, 2)$, минимум во $(-5, 10)$, б) минимум во $(-1, 2)$ и $(1, 2)$, в) максимум во $(1, 2)$, минимум во $\left(-\frac{1}{3}, \frac{22}{27}\right)$,
 г) максимум во $(1, 1)$, д) максимум во $(3, 4)$, минимум во $(1, 0)$, е) максимум во $(-1, 5)$, минимум во $(3, -27)$;
 3. максимум во $(2, -3)$, минимум во $(8, 3)$; 4. максимум во $(2, 7)$, минимум во $(0, -1)$.

ИСПИТУВАЊЕ НА КОНВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ НА ФУНКЦИЈА. ПРЕВОЈНИ ТОЧКИ НА ФУНКЦИЈА

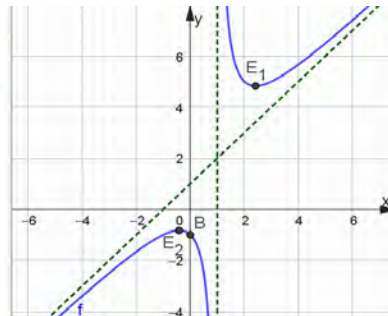
1. конкавна (вдлабната) за $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, конвексен (испакнат) за $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, превојна точка е $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$;
 2. конкавна (вдлабната) за $x \in (-\infty, 1)$, конвексен (испакнат) за $x \in (1, +\infty)$.
 3. $a = 3$; 4. Превојни точки се $P_1(1, 1)$, $P_2\left(-2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$, $P_3\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right)$. Равенка на правата е $x - 4y + 3 = 0$.

ИСПИТУВАЊЕ НА ТЕКОТ И КОНСТРУКЦИЈА ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

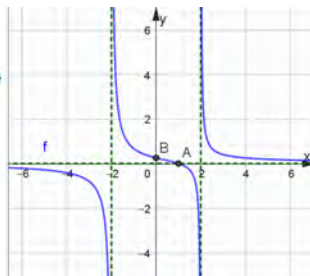
1. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
 $A = (0.43, 0)$
 $B = (0, -1)$
 $I1 = \emptyset$
 $P = (0.67, 0.41)$



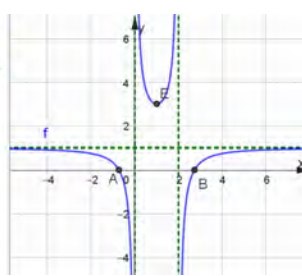
- б) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
 $B = (0, -1)$
 $I1 = \{y = x + 1, x = 1\}$
 $E_2 = (-0.41, -0.83)$
 $E_1 = (2.41, 4.83)$



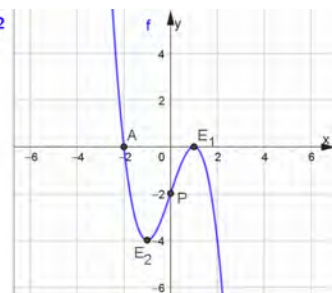
б) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$
 $B = (0, 0.25)$
 $I_1 = \{y=0, x=-2, x=2\}$
 $A = (1, 0)$



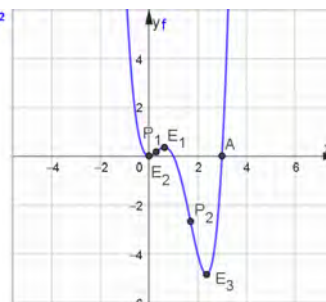
2. а) $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}$
 $I_1 = \{y=1, x=0, x=2\}$
 $E = (1, 3)$
 $A = (-0.73, 0)$
 $B = (2.73, 0)$



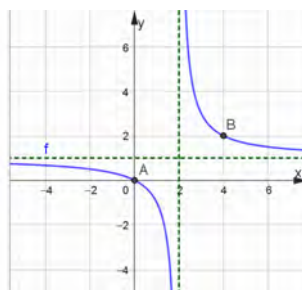
б) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
 $I_1 = \emptyset$
 $P = (0, -2)$
 $E_2 = (-1, -4)$
 $E_1 = (1, 0)$
 $A = (-2, 0)$



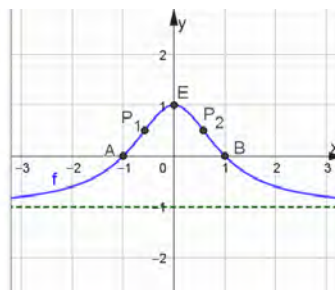
б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$
 $I_1 = \emptyset$
 $P_2 = (1.71, -2.66)$
 $P_1 = (0.29, 0.16)$
 $E_3 = (2.37, -4.85)$
 $E_1 = (0.63, 0.35)$
 $E_2 = (0, 0)$
 $A = (3, 0)$



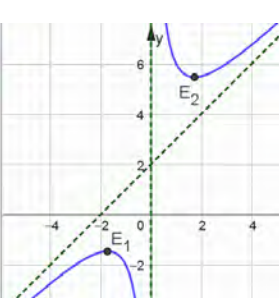
3. а) $f(x) = \frac{x}{x-2}$
 $I_1 = \{y=1, x=2\}$
 $A = (0, 0)$
 $B = (4, 2)$



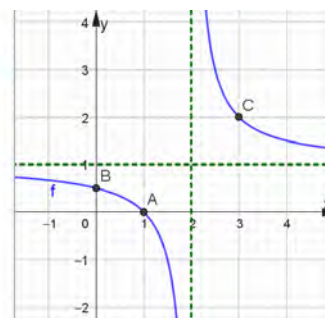
б) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$
 $I_1 = \{y=-1\}$
 $A = (-1, 0)$
 $P_2 = (0.58, 0.5)$
 $P_1 = (-0.58, 0.5)$
 $B = (1, 0)$
 $E = (0, 1)$



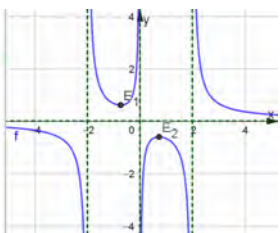
б) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x}$
 $I_1 = \{y=x+2, x=0\}$
 $E_2 = (1.73, 5.46)$
 $E_1 = (-1.73, -1.46)$
 $B = (0, \infty)$



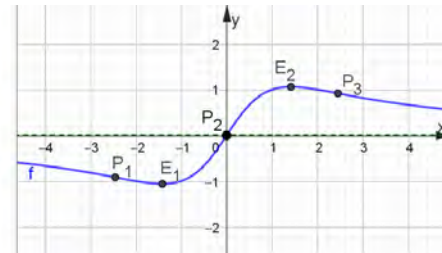
4. а) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
 $I_1 = \{y=1, x=2\}$
 $A = (1, 0)$
 $B = (0, 0.5)$
 $C = (3, 2)$



б) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-4x}$
 $I_1 = \{y=0, x=-2, x=0, x=2\}$
 $E_2 = (0.73, -0.61)$
 $E_1 = (-0.73, 0.61)$



б) $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$
 $I_1 = \{y=0\}$
 $E_1 = (-1.41, -1.06)$
 $E_2 = (1.41, 1.06)$
 $P_2 = (0, 0)$
 $P_1 = (-2.45, -0.92)$
 $P_3 = (2.45, 0.92)$



5. а) $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$

$I = \{y=0\}$

$E_1 = (-0.41, 1.25)$

$E_2 = (2.41, -0.43)$

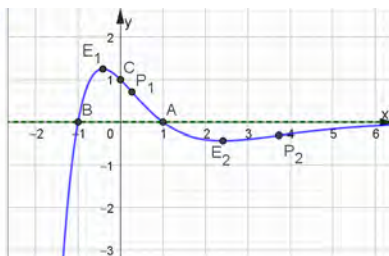
$P_1 = (0.27, 0.71)$

$P_2 = (3.73, -0.31)$

$A = (1, 0)$

$B = (-1, 0)$

$C = (0, 1)$



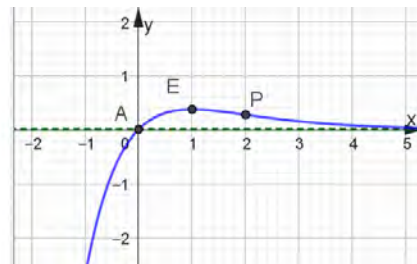
б) $f(x) = xe^{-x}$

$I = \{y=0\}$

$E = (1, 0.37)$

$A = (0, 0)$

$P = (2, 0.27)$



в) $f(x) = x^2 e^x$

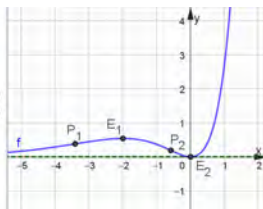
$I = \{y=0\}$

$E_1 = (0, 0)$

$E_2 = (-2, 0.54)$

$P_1 = (-3.41, 0.38)$

$P_2 = (-0.59, 0.19)$



6. а) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ б) $A = (0.75, 0)$ в) $B = (0, 1)$ г) расте за $x \in (-\infty, 0) \cup (1.5, 3) \cup (3, +\infty)$, опаѓа за $x \in (0, 1) \cup (1, 1.5)$
 д) испакната за $x \in (-0.85, 1) \cup (3, +\infty)$, вдлабната за $x \in (-\infty, -0.85) \cup (1, 3)$ е) максимум во $B = (0, 1)$, минимум во $C = (1.5, 4)$
 ж) $f(4) = -4.33$ з) $x = 1.5$ с) ниту парна, ниту непарна; 7. а) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ б) $A = (0, 0)$
 в) $A = (0, 0)$ г) расте за $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, опаѓа за $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$
 д) испакната за $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, вдлабната за $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ е) максимум во $B = (-3, -4.5)$, минимум во $C = (3, 4.5)$ ж) $f(4) = 4.92$ з) непарна;

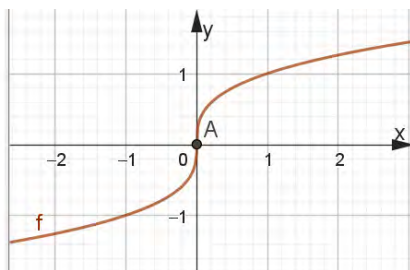
9. ПРИМЕНА НА ИЗВОД ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМИ ОД ЕКСТРЕМИ

1. 21 и 21; 2. $\frac{27}{2}$ и $\frac{27}{2}$; 3. 9 и 9; 4. квадрат со страна $\frac{13}{2}$; 5. квадрат со страна $\frac{11}{2}$; 6. квадрат со страна од 8 клупи. 12m;
 7. рамнокракт правоаголен триаголник со катета $5\sqrt{2}$; 8. правоаголник со страни 4cm и 1.5cm и плоштина 3cm²;
 9. радиус 3cm и висина 6cm. Рамностран цилиндар; 10. $r = \frac{8}{3} \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $V = \frac{128}{9} \pi \text{ cm}^3$;
 12. Квадрат со страна 6cm. $V = 3888 \text{ cm}^3$; 13. во точка $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$; 14. $P = \frac{32\sqrt{3}}{9}$;

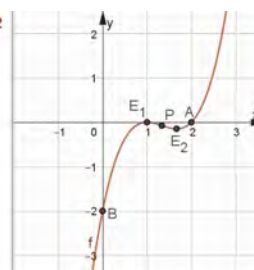
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА:

1. $12x^2 - x + 3$; 2. $\frac{5}{2(x+3)\sqrt{(x-2)(x+3)}}$; 3. $\frac{5}{(3x-2)(x+1)}$; 4. $e^{3x}(3\sin(x^2+1) + 2x\cos(x^2+1))$; 5. $y = 4$; 6. $y = -x + 1$;
 7. $v = s'(2) = 8$; 8. $a = s''(1) = 20$; 9. $t: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ и $n: y = -3x - 10$; 10. опаѓа за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
 11. максимум во $(0, 0)$, минимум во $(2, -8)$; 12. испакната за $x \in (-\infty, 1)$, вдлабната за $x \in (1, +\infty)$. Превојна точка во $(1, -2)$;

13. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
 $A = (0, 0)$



14. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
 $E_1 = (1.67, -0.15)$
 $E_2 = (1, 0)$
 $P = (1.33, -0.07)$
 $A = (2, 0)$
 $B = (0, -2)$



15. 30 и 30; 16. 40 и 40; 17. 50 и 50; 18. квадрат со страна 11cm; 19. Радиусот на цилиндарот е $\frac{2r}{3}$ и висината е $\frac{H}{3}$;
 20. Радиус на конусот е $R\sqrt{2}$ и висина на конусот е $4R$. Волуменот е $\frac{8\pi}{3}R^3$.

